ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของหน่วยแรงทีสำหรับรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นภายใต้แรงกระทำความร้อน

EXACT SOLUTION OF T-STRESS COMPONENTS FOR PENNY-SHAPED CRACK IN TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC MEDIUM UNDER THERMAL LOADING

อภิสิทธิ์ ตุ้ยสา[1] ธนดล จันทร์โคตร[2] ปิยะฉัตร ฉัตรตันใจ[3] วีรพร พงศ์ติณบุตร[4,*] ยโสธร ทรัพย์เสถียร[5] และ ทศพร ประเสริฐศรี[6]

[1,2,3,4] ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา จ.ชลบุรี
[5] ภาควิชาวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล จ.นครปฐม
[6] สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก จ.กรุงเทพมหานคร
**Corresponding author; E-mail address: Weeraporn@buu.ac.th*

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลเฉลยรูปแบบปิดของหน่วยแรงทีของรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้นไร้ขอบเขตสามมิติภายใต้แรงกระทำความร้อน ผลเฉลยกรณีมีอุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอกระทำที่ผิวรอยร้าวถูกพัฒนาขึ้น โดยใช้ผลเฉลยแม่นตรงของสนามหน่วยแรงที่มีอยู่ในอดีตร่วมกับสูตรที่ได้จากการกระจายสนามหน่วยแรงบริเวณใกล้ขอบรอยร้าว และการหาค่าอนุพันธ์และการหาลิมิตทำให้ได้ผลเฉลยของหน่วยแรงทีในรูปฟังก์ชันพื้นฐานเท่านั้น ตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลขบ่งชี้ว่า หน่วยแรงทีภายใต้แรงกระทำความร้อนขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้นี้สามารถนำมาใช้เป็นผลเฉลยอ้างอิงสำหรับการวิเคราะห์ปัญหารอยร้าวในกรณีอื่นๆ ได้

คำสำคัญ: รอยร้าววงกลม, ทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิก, หน่วยแรงที, อุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ

Abstract

This paper presents closed-form solutions for T-stress components of a penny-shaped crack in a three-dimensional, transversely isotropic, linearly elastic infinite medium under a thermal loading. The solution for the case of uniform temperature load acting on the crack surface is derived. Existing analytical solutions of the stress field are employed along with the near-front expansion and standard differentiation and limiting process to derive T-stress components in term of elementary functions. Numerical example shows that the T-stress components under thermal loading depend on the material properties. The obtained closed-form solutions can be used as the benchmark solutions for analysis of general crack problems.

Keywords: Penny-shaped crack, Transversely isotropic, T-stress, Uniform temperature

1. บทนำ

ในปัจจุบันการวิเคราะห์ผลของความร้อน (หรืออุณหภูมิ) ในโครงสร้างทางวิศวกรรมเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ ยกตัวอย่างเช่น เครื่องบิน เครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ (Nuclear Reactor) และกระสวยอวกาศ เป็นต้น ผลของความร้อนอาจทำให้โครงสร้างหรืออุปกรณ์เหล่านั้นเกิดการแตกร้าวได้ รวมทั้งอาจเกิดการวิบัติได้ในที่สุด [1-4] หรือแม้กระทั่งในงานทางด้านวิศวกรรมโยธา เป็นที่ทราบกันดีว่า คอนกรีตที่มีขนาดใหญ่หรือมีความหนามาก มักเกิดปัญหาการแตกร้าวเนื่องจากอุณหภูมิของคอนกรีตที่สูงขึ้น เมื่อคอนกรีตเกิดรอยร้าวแล้ว ทำให้ความสามารถในการรับแรงกระทำของคอนกรีตลดลงหรือมีอายุการใช้งานสั้นลง ด้วยเหตุนี้การวิเคราะห์โครงสร้างนอกเหนือจากการวิเคราะห์ผลของแรงกระทำทางกลแล้ว จึงจำเป็นต้องพิจารณาผลของความร้อน (หรืออุณหภูมิ) เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

แบบจำลองคณิตศาสตร์ (mathematical model) ที่ใช้ทฤษฎีกลศาสตร์การแตกหักของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM) มีความเหมาะสมและเพียงพอในการอธิบายพฤติกรรมการแตกหักบริเวณปลายรอยร้าวของวัสดุ [5-6] อย่างไรก็ตามงานวิจัยส่วนใหญ่ในอดีต [7-9] ให้ความสำคัญกับตัวประกอบความเข้มของความเค้น (stress intensity factor) ซึ่งเป็นพจน์แรกของการกระจายอนุกรมวิลเลียม (Williams series expansion) ที่แสดงถึงแอมพลิจูดของภาวะเอกฐานที่ปลายรอยร้าว (amplitude of the crack-tip singularity) อย่างไรก็ดี มีงานวิจัยหลายชิ้นบ่งชี้ว่าพจน์ที่สองของการกระจายอนุกรมวิลเลียม ซึ่งถูกนิยามว่า หน่วยแรงที (T-stress) มีผลกระทบต่อขนาดและรูปร่างบริเวณเสียรูปพลาสติกที่ปลายของรอยร้าว [10-12] ความต้านทานการแตกหัก (fracture toughness) [13-15] และทิศทางการเติบโตของรอยร้าวที่เกิดขึ้นในวัสดุ [12-13] ด้วยเหตุนี้ หน่วยแรงทีจึงเป็นพารามิเตอร์

ปลายรอยร้าว (crack tip parameter) ที่มีความสำคัญ หากขาดการพิจารณาในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้ว อาจทำให้ผลการทำนายพฤติกรรมการเสียรูปบริเวณปลายรอยร้าวของวัสดุผิดพลาดได้

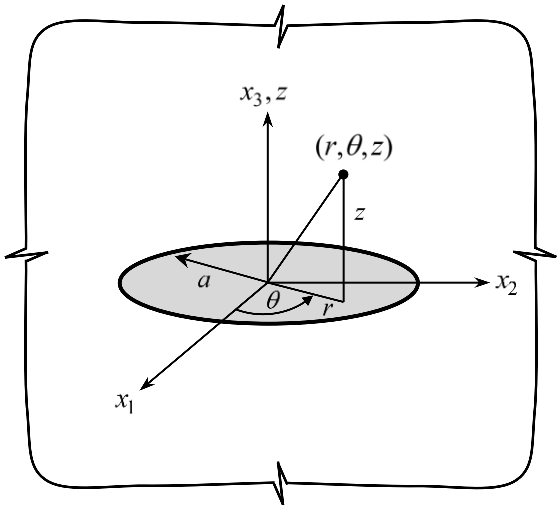
อย่างไรก็ดี งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับหน่วยแรงทีภายใต้แรงกระทำความร้อนยังมีอยู่อย่างจำกัด โดยส่วนใหญ่มุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์ปัญหารอยร้าวสองมิติ [2,16-17] กล่าวคือ สำหรับวัสดุเอกพันธุ์ยืดหยุ่นเชิงเส้น Sladek และ Sladek [2] ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (boundary element method) และ conservation integral คำนวณหาหน่วยแรงทีของรอยร้าวในแผ่นสี่เหลี่ยม (rectangular plate) และในท่อผนังหนาที่มีความยาวเป็นอนันต์ (an infinitely long thick-walled tube) ส่วน Yang และ Ravi-Chandar [16] ใช้วิธี stress difference method วิเคราะห์หน่วยแรงทีของรอยร้าวกลางแผ่นสี่เหลี่ยม พบว่า คำตอบที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับ Sladek และ Sladek [2] ต่อมา Zhong และ Lee [17] นำเสนอเงื่อนไขขอบเขตทางความร้อน (thermal boundary condition) ที่ผิวรอยร้าวโดยมีสมมุติฐานว่า ฟลักซ์ความร้อน (heat flux) ที่ตั้งฉากกับผิวรอยร้าวขึ้นอยู่กับสามปัจจัย คือ สภาพนำความร้อน (thermal conductivity) ของตัวกลางภายในรอยร้าว ผลต่างของอุณหภูมิระหว่างผิวบนและล่างของรอยร้าว และระยะเปิดออกของรอยร้าวระหว่างผิวบนกับผิวล่าง ผลการวิเคราะห์รอยร้าว Griffith ในวัสดุทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกภายใต้แรงกระทำเชิงกลและความร้อน (mechanical and thermal loadings) พบว่า หน่วยแรงทีขึ้นอยู่กับแรงกระทำเชิงกลเท่านั้น โดยไม่ขึ้นอยู่กับค่าคงที่วัสดุและแรงกระทำความร้อน

สำหรับวัสดุ Functionally Graded Materials (FGMs) งานวิจัยส่วนใหญ่ยังจำกัดอยู่ที่ปัญหารอยร้าวสองมิติเช่นกัน [4,18-20] มีเพียงส่วนน้อยเท่านั้นที่วิเคราะห์ปัญหาสามมิติ กล่าวคือ Amit และ Kim [21] และ Kim และ Amit [22] ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และ interaction integral วิเคราะห์หน่วยแรงทีภายใต้แรงกระทำความร้อนของรอยร้าวในแผ่นสี่เหลี่ยม การขาดความเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับอิทธิพลของหน่วยแรงทีต่อปัญหารอยร้าวสามมิติ อาจส่งผลกระทบต่อแนวความคิดและหลักการที่สำคัญในการออกแบบโครงสร้างหรืออุปกรณ์ภายใต้แรงกระทำความร้อน

บทความนี้นำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของหน่วยแรงทีสำหรับรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้นไร้ขอบเขตสามมิติภายใต้แรงกระทำความร้อน

2. รายละเอียดประกอบปัญหา (PROBLEM DESCRIPTION)

พิจารณารอยร้าววงกลมรัศมี a ในตัวกลางไร้ขอบเขตสามมิติ (a three-dimensional infinite medium) ดังรูปที่ 1 ตัวกลางทำมาจากวัสดุเอกพันธุ์ทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้น แกนสมมาตรวัสดุ (the axis of material symmetry) มีทิศทางตั้งฉากกับผิวรอยร้าว (หรืออีกนัยหนึ่ง ระนาบของไอโซทรอปีขนานกับผิวรอยร้าว) ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $\{\mathbf{0}; x_1, x_2, x_3\}$ และระบบพิกัดทรงกระบอก $\{\mathbf{0}; r, \theta, z\}$ ถูกนำมาใช้อ้างอิง กำหนดให้จุดกำเนิด $\mathbf{0}$ อยู่ตรงจุดศูนย์กลางของรอยร้าว แกน x_3 มีทิศทางพุ่งขึ้นและตั้งฉากกับผิวรอยร้าว ในขณะที่แกน x_1 และ x_2 มีทิศทางเป็นไปตามกฎมือขวา ในการศึกษาครั้งนี้ กำหนดให้มีอุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ T_0 กระทำที่ผิวรอยร้าววงกลม และทราบค่าคงที่ของวัสดุกล่าวคือ ค่าคงที่อิลาสติก (elastic constants) $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}\}$, มอดุลัสความร้อน (thermal moduli) $\{\beta_1, \beta_3\}$ และสัมประสิทธิ์ของสภาพนำความร้อน (coefficients of thermal conductivity) $\{k_{11}, k_{33}\}$



รูปที่ 1 รอยร้าววงกลมรัศมี a ในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้นไร้ขอบเขต

3. สมการพื้นฐาน (BASIC EQUATIONS)

สมการสมดุลเชิงกลและความร้อน (mechanical and heat equilibrium equations) โดยไม่คิดผลของแรงวัตถุ (body force) แสดงดังสมการที่ (1) ถึง (4) [23-24]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$k_{11}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} = 0 \tag{4}$$

กฎแห่งวัสดุ (constitutive law) ของวัสดุทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกเทอร์มออิลาสติก เมื่อระนาบ xy ขนานกับระนาบของไอโซทรอปีในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z) แสดงดังสมการที่ (5) ถึง (10)

$$\sigma_x = c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{13}\frac{\partial w}{\partial z} - \beta_1 T \tag{5}$$

$$\sigma_y = c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{11}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{13}\frac{\partial w}{\partial z} - \beta_1 T \tag{6}$$

$$\sigma_z = c_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+c_{33}\frac{\partial w}{\partial z}-\beta_3 T \tag{7}$$

$$\tau_{yz} = c_{44}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{8}$$

$$\tau_{zx} = c_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{9}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(c_{11}-c_{12}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{10}$$

เมื่อ σ_{ij} และ T คือองค์ประกอบของหน่วยแรง และความเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ (temperature change) ตามลำดับ ต่อมา u v และ w คือองค์ประกอบของการกระจัดเชิงกล (mechanical displacement) ในทิศทาง x y และ z ตามลำดับ ในขณะที่ c_{ij} β_i และ k_{ii} คือค่าคงที่อิลาสติก มอดุลัสความร้อน และสัมประสิทธิ์ของสภาพนำความร้อน ตามลำดับ

4. ระเบียบวิธีและวิธีดำเนินการ (METHODOLOGY AND PROCEDURE)

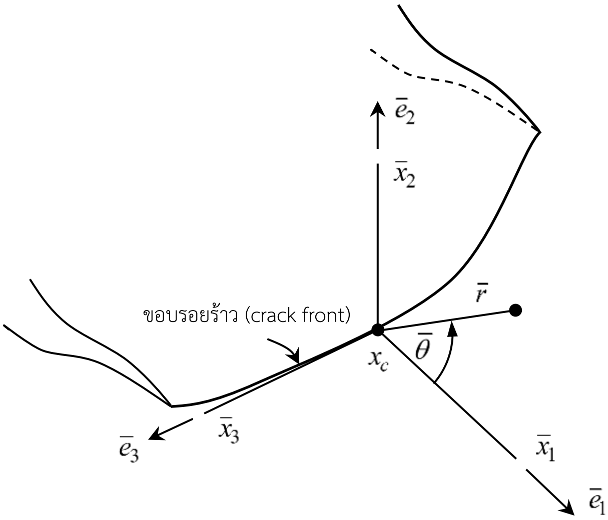
การคำนวณหาหน่วยแรงที (พจน์ที่สองของการกระจายอนุกรมวิลเลียม [25]) ของรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิก ใช้วิธีการทำนองเดียวกับ Rungamornrat และ Pinitpanich [26] โดยเทนเซอร์หน่วยแรงที (T-stress tensor) มีทั้งหมด 9 องค์ประกอบ (component) แต่มีอิสระต่อกัน 6 องค์ประกอบ เนื่องจากคุณสมบัติสมมาตร อย่างไรก็ดี องค์ประกอบ $T_{12}(x_c)$ $T_{22}(x_c)$ และ $T_{23}(x_c)$ ทราบค่า ในขณะที่ หน่วยแรงทีอีกสามองค์ประกอบที่เหลือ $T_{11}(x_c)$ $T_{33}(x_c)$ และ $T_{13}(x_c)$ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และถูกแสดงในเทอมของสนามหน่วยแรงได้อย่างชัดแจ้ง (explicit) ดังสมการที่ (11) ถึง (13)

$$T_{11}(x_c) = 2\lim_{\bar{r}\to 0}\left\{\sqrt{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left[\sqrt{\bar{r}}\,\bar{\sigma}_{11}(x_c;\bar{r},\bar{\theta}=0)\right]\right\} \tag{11}$$

$$T_{33}(x_c) = 2\lim_{\bar{r}\to 0}\left\{\sqrt{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left[\sqrt{\bar{r}}\,\bar{\sigma}_{33}(x_c;\bar{r},\bar{\theta}=0)\right]\right\} \tag{12}$$

$$T_{13}(x_c) = 2\lim_{\bar{r}\to 0}\left\{\sqrt{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left[\sqrt{\bar{r}}\,\bar{\sigma}_{13}(x_c;\bar{r},\bar{\theta}=0)\right]\right\} \tag{13}$$

เมื่อ x_c คือจุดที่อยู่บนขอบรอยร้าว (crack front) ดังแสดงในรูปที่ 2 ตัวแปรที่มีเครื่องหมาย "-" อยู่ด้านบนถูกอ้างอิงถึงระบบพิกัดเฉพาะที่ (local coordinate system) $\{x_c;\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$ โดยมีจุดกำเนิดที่จุด x_c และสอดคล้องกับเบสิสเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ โดยที่ $\bar{x}_1-\bar{x}_3$ คือระนาบสัมผัส (tangent plane) กับผิวรอยร้าวที่จุด x_c ในขณะที่ระนาบ $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ ตั้งฉากกับขอบรอยร้าวที่จุด x_c; $(\bar{r},\bar{\theta})$ คือพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) ของจุดในระนาบ $\bar{x}_1-\bar{x}_2$; $\bar{\sigma}_{ij}(x_c;\bar{r},\bar{\theta})$ คือองค์ประกอบของหน่วยแรงที่จุดใดๆ ในระนาบ $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ ในบริเวณใกล้เคียงกับจุด x_c; และ อักษรตัวเล็กที่ห้อยอยู่ท้ายตัวแปรมีค่าพิสัย (range) ตั้งแต่ 1 ถึง 3 (รายละเอียดของการพัฒนาสมการที่ (11) ถึง (13) สามารถดูได้จาก Rungamornrat และ Pinitpanich [26])



รูปที่ 2 ขอบรอยร้าวและระบบพิกัดเฉพาะที่ $\{x_c;\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$ โดยมีจุดกำเนิดที่จุด x_c ใช้สำหรับนิยามหน่วยแรงที

จากสมการที่ (11) ถึง (13) จะเห็นได้ว่า การคำนวณหน่วยแรงทีจากผลเฉลยแม่นตรงของสนามหน่วยแรง ต้องการเพียงแค่การหาอนุพันธ์และลิมิตเท่านั้น โดยไม่จำเป็นต้องกระจายอนุกรม อย่างไรก็ดี ก่อนที่จะคำนวณหาหน่วยแรงที จำเป็นที่จะต้องทราบค่าสนามหน่วยแรงในบริเวณใกล้เคียงรอบจุด x_c บนขอบรอยร้าวก่อน โดยในการศึกษาครั้งนี้ ได้นำผลเฉลยแม่นตรงของสนามหน่วยแรงของรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้นไร้ขอบเขตสามมิติ ภายใต้แรงกระทำความร้อนที่เสนอโดย Chen และคณะ [23] (ดังสมการที่ (14) ถึง (16)) มาใช้ในการพัฒนาคำนวณหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของหน่วยแรงที

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} =& \frac{2s_3 g_{12} T_0}{g_{11}}\sum_{i=1}^{3}\gamma_{i2}h_{i1}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2i}}\right)-\frac{a\sqrt{l_{2i}^2-a^2}}{l_{2i}^2-l_{1i}^2}\right]\\ &-2s_3T_0\sum_{i=1}^{3}\gamma_{i2}h_{i2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2i}}\right)\\ &-\frac{4c_{66}s_3g_{12}T_0}{g_{11}}a\cos(2\phi)\sum_{i=1}^{3}h_{i1}\frac{l_{1i}^2\sqrt{l_{2i}^2-a^2}}{l_{2i}^2\left(l_{2i}^2-l_{1i}^2\right)}\\ &+\frac{2c_{66}s_3T_0}{r^2}\cos(2\phi)\sum_{i=1}^{3}h_{i2}\left(a\sqrt{l_{2i}^2-a^2}+z_i\sqrt{a^2-l_{1i}^2}-2z_ia\right)\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} =& -\frac{4c_{66}s_3g_{12}T_0}{g_{11}}a\sin(2\phi)\sum_{i=1}^{3}h_{i1}\frac{l_{1i}^2\sqrt{l_{2i}^2-a^2}}{l_{2i}^2\left(l_{2i}^2-l_{1i}^2\right)}\\ &+\frac{2c_{66}s_3T_0}{r^2}\sin(2\phi)\sum_{i=1}^{3}h_{i2}\left(a\sqrt{l_{2i}^2-a^2}+z_i\sqrt{a^2-l_{1i}^2}-2z_ia\right)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \frac{2s_3 g_{12} T_0}{g_{11}} \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i2} h_{i1} \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2i}}\right) - \frac{a\sqrt{l_{2i}^2 - a^2}}{l_{2i}^2 - l_{1i}^2} \right]$$
$$- 2s_3 T_0 \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i2} h_{i2} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2i}}\right) \tag{16}$$
$$+ \frac{4c_{66} s_3 g_{12} T_0}{g_{11}} a\cos(2\phi) \sum_{i=1}^{3} h_{i1} \frac{l_{1i}^2 \sqrt{l_{2i}^2 - a^2}}{l_{2i}^2 \left(l_{2i}^2 - l_{1i}^2\right)}$$
$$- \frac{2c_{66} s_3 T_0}{r^2} \cos(2\phi) \sum_{i=1}^{3} h_{i2} \left(a\sqrt{l_{2i}^2 - a^2} + z_i \sqrt{a^2 - l_{1i}^2} - 2z_i a \right)$$

5. ผลการศึกษา (RESULTS)

ใช้สมการที่ (11) ถึง (13) ร่วมกับผลเฉลยแม่นตรงของสนามหน่วยแรงที่เสนอโดย Chen และคณะ [23] (สมการที่ (14) ถึง (16)) การหาค่าอนุพันธ์ และการหาลิมิตทำให้ได้ผลเฉลยของหน่วยแรงทีในรูปฟังก์ชันพื้นฐาน สำหรับการวิเคราะห์ปัญหารอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้นไร้ขอบเขตสามมิติ โดยมีอุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอกระทำที่ผิวรอยร้าว ดังสมการ

$$T_{11} = \frac{s_3 g_{12} T_0 \pi}{g_{11}} \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i2} h_{i1} - s_3 T_0 \pi \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i2} h_{i2} \tag{17}$$

$$T_{33} = \frac{s_3 g_{12} T_0 \pi}{g_{11}} \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i2} h_{i1} - s_3 T_0 \pi \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i2} h_{i2} \tag{18}$$

$$T_{13} = 0 \tag{19}$$

เมื่อ T_0 คือ อุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอกระทำที่ผิวรอยร้าววงกลม ในขณะที่

$$s_3 = \sqrt{k_{11}/k_{33}} \tag{20}$$

$$g_{1j} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i1} h_{ij} \qquad (j = 1,2) \tag{21}$$

$$\begin{Bmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \\ \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12}s_1 & \alpha_{22}s_2 & \alpha_{32}s_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

เมื่อ δ_{ij} คือ Kronecker delta โดยที่ $j = 1,2$

$$\gamma_{i1} = c_{13} + c_{33} s_i \alpha_{i1} - \beta_3 \alpha_{i2} \tag{23}$$
$$\gamma_{i2} = 2\left[\left(c_{11} - c_{66}\right) + c_{13} s_i \alpha_{i1} - \beta_1 \alpha_{i2}\right] \tag{24}$$
$$\gamma_{i3} = -c_{44} s_i + c_{44} \alpha_{i1} \tag{25}$$
$$\gamma_{i1} s_i = \gamma_{i3} \tag{26}$$
$$s_0 = \sqrt{c_{66}/c_{44}} \tag{27}$$
$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \tag{28}$$
$$\alpha_{i1} = \lambda_{i2} s_i / \lambda_{i1} \tag{29}$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{22} = 0 \tag{30}$$
$$\alpha_{32} = \lambda_{33}/\lambda_{31} \tag{31}$$
$$\lambda_{ij} = -a_j + b_j s_i^2 \quad (j = 1,2) \tag{32}$$
$$\lambda_{33} = a_0 s_3^4 - b_0 s_3^2 + c_0 \tag{33}$$
$$a_1 = -\beta_1 c_{44} \tag{34}$$
$$b_1 = \beta_3 (c_{13} + c_{44}) - \beta_1 c_{33} \tag{35}$$
$$a_2 = \beta_3 c_{11} - \beta_1 (c_{13} + c_{44}) \tag{36}$$
$$b_2 = \beta_3 c_{44} \tag{37}$$
$$z_i = s_i z \tag{38}$$

เมื่อ $\{k_{11}, k_{33}\}$ คือ สัมประสิทธิ์ของสภาพนำความร้อน ในขณะที่ $\{\beta_1, \beta_3\}$ คือ มอดุลัสความร้อน และ $\{s_1, s_2\}$ คือ ราก (root) ที่มีส่วนที่เป็นจำนวนจริงบวก (positive real part) ที่ได้จากการแก้สมการ

$$a_0 s^4 - b_0 s^2 + c_0 = 0 \tag{39}$$

เมื่อค่าคงที่ a_0 b_0 และ c_0 มีค่าดังต่อไปนี้

$$a_0 = c_{33} c_{44} \tag{40}$$
$$b_0 = c_{11} c_{33} + c_{44}^2 - (c_{13} + c_{44})^2 \tag{41}$$
$$c_0 = c_{11} c_{44} \tag{42}$$

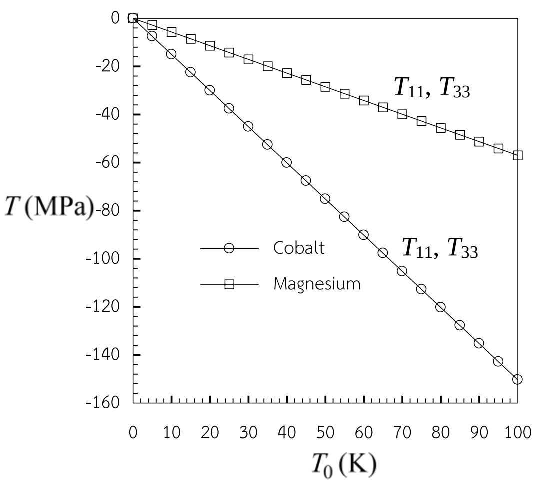
โดยที่ $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}\}$ คือ ค่าคงที่อิลาสติก โดยรายละเอียดเพิ่มเติมสามารถดูได้จาก Chen และคณะ [23]

ตัวอย่างการคำนวณหาหน่วยแรงทีในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิก 2 ชนิด คือ โคบอลต์ (cobalt) และ แมกนีเซียม (magnesium) ซึ่งมีคุณสมบัติของวัสดุแสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของวัสดุทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิก [27] ที่ใช้ในการคำนวณ

		โคบอลต์	แมกนีเซียม
ค่าคงที่อิลาสติก (Elastic constants) ($\times 10^{10}$ Nm^{-2})	c_{11}	30.71	5.974
	c_{12}	16.50	2.64
	c_{13}	10.27	2.17
	c_{33}	35.81	6.17
	c_{44}	7.55	1.639
มอดุลัสความร้อน (Thermal moduli) ($\times 10^{5}$ NK^{-1}m^{-2})	β_1	70.4	26.8
	β_3	69	26.8
สัมประสิทธิ์ของสภาพนำความร้อน (Coefficients of thermal conductivity) (WK^{-1}m^{-1})	k_{11}	69	170
	k_{33}	69	170

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขของหน่วยแรงที T_{11} และ T_{33} ซึ่งมีค่าเท่ากัน แสดงดังรูปที่ 3 และนอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที (หรือความชันของกราฟ T_{11} และ T_{33}) แสดงดังตารางที่ 2 พบว่า หน่วยแรงทีภายใต้แรงกระทำความร้อนขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุอย่างมีนัยสำคัญ โดยที่อุณหภูมิ T_0 เดียวกัน ขนาดหน่วยแรงทีในวัสดุโคบอลต์ มีค่ามากกว่าวัสดุแมกนีเซียม เป็นที่น่าสังเกตว่า หน่วยแรงทีของรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุตัวกลาง ทั้งในกรณีที่พิจารณาและไม่พิจารณาผลของแรงกระทำความร้อน (Rungamornrat และ Pinitpanich [26])



รูปที่ 3 หน่วยแรงที T_{11} และ T_{33} ของรอยร้าววงกลมในวัสดุโคบอลต์และแมกนีเซียม โดยมีอุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ T_0 กระทำที่ผิวรอยร้าว

ตารางที่ 2 นอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที $\{T_{11}, T_{33}\}$ ของรอยร้าววงกลมในวัสดุโคบอลต์และแมกนีเซียม โดยมีอุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ T_0 กระทำที่ผิวรอยร้าว

ชนิดของวัสดุ	$(T_{11},T_{33})/T_0$ (x10^6 Nm^{-2}K^{-1})
โคบอลต์	-1.5035
แมกนีเซียม	-0.5700

6. บทสรุป

บทความนี้นำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของหน่วยแรงทีของรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลีย์ไอโซทรอปิกยืดหยุ่นเชิงเส้นไร้ขอบเขตสามมิติ โดยมีอุณหภูมิแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอกระทำที่ผิวรอยร้าว การพัฒนาผลเฉลยใช้สนามหน่วยแรงที่มีอยู่ในอดีตร่วมกับการหาค่าอนุพันธ์และการหาลิมิตทำให้ได้ผลเฉลยของหน่วยแรงทีในรูปฟังก์ชันพื้นฐานเท่านั้น ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้นี้สามารถนำมาใช้เป็นผลเฉลยอ้างอิงในขั้นตอนของการทวนสอบคำตอบให้กับวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขอื่นๆ เช่น ไฟไนต์เอลิเมนต์ และ บาวดารีเอลิเมนต์ เป็นต้น ในการวิเคราะห์ปัญหารอยร้าวในกรณีอื่นๆ ได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Nowacki, W. (1962). *Thermoelasticity*. Pergamon Press, New York.

[2] Sladek, J. and Sladek, V. (1997). Evaluation of T-stresses and stress intensity factors in stationary thermoelasticity by the conservation integral method. *International Journal of Fracture*, 86, pp. 199-219.

[3] Ai, W. and Augarde, C.E. (2019). Thermoelastic fracture modelling in 2D by an adaptive cracking particle method without enrichment functions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 160, pp. 343-357.

[4] Zhang, H.H., Ji, X.L., Han, S.Y. and Fan, L.F. (2021). Determination of T-stress for thermal cracks in homogeneous and functionally graded materials with the numerical manifold method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 113, pp. 102940.

[5] Li, S., Mear, M.E. and Xiao, L. (1998). Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151, pp. 435-459.

[6] Rungamornrat, J. and Mear, M.E. (2008). A weakly-singular SGBEM for analysis of cracks in 3D anisotropic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, pp. 4319-4332.

[7] Liu, L. and Kardomateas, G.A. (2005). Thermal stress intensity factors for a crack in an anisotropic half plane. *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp. 5208-5223.

[8] Li, X.F. and Lee, K. Y. (2015). Effect of heat conduction of penny-shaped crack interior on thermal stress intensity factors. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 91, pp. 127-134.

[9] Singh, A., Das, S. and Craciun, E.-M. (2018). Thermal stress intensity factor for an edge crack in orthotropic composite media. *Composites Part B: Engineering*, 153, pp. 130-136.

[10] Larsson, S.G. and Carlsson, A.J. (1973). Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21, pp. 263-277.

[11] Rice, J.R. (1974). Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 22, pp. 17-26.

[12] Ueda, Y., Ikeda, K., Yao, T. and Aoki, M. (1983). Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Engineering Fracture Mechanics*, 18, pp. 1131-1158.

[13] Williams, J.G. and Ewing, P.D. (1972). Fracture under complex stress—The angled crack problem. *International Journal of Fracture Mechanics*, 8, pp. 441-446.

[14] Hancock, J.W., Reuter, W.G. and Parks, D.M. (1993). Constraint and toughness parameterized by T. *Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171,* American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 21-40.

[15] Ayatollahi, M.R., Pavier, M.J. and Smith, D.J. (1998). Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *International Journal of Fracture*, 91, pp. 283–298.

[16] Yang, B. and Ravi-Chandar, K. (1999). Evaluation of elastic T-stress by the stress difference method. *Engineering Fracture Mechanics*, 64, pp. 589-605.

[17] Zhong, X.C. and Lee, K.Y. (2012). A thermal-medium crack model. *Mechanics of Materials*, 51, pp. 110-117.

[18] Guo, F., Guo, L., Huang, K., Bai, X., Zhong, S. and Yu, H. (2015). An interaction energy integral method for T-stress evaluation in nonhomogeneous materials under thermal loading. *Mechanics of Materials*, 83, pp. 30-39.

[19] Sladek, J., Sladek, V., Repka, M. and Tan, C.L. (2016). Evaluation of the T-stress for cracks in functionally graded materials by the FEM. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 86, pp. 332-341.

[20] Iqbal, M.D., Birk, C., Ooi, E.T., Pramod, A.L.N., Natarajan, S., Gravenkamp, H. and Song, C. (2022). Thermoelastic fracture analysis of functionally graded materials using the scaled boundary finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 264, pp. 108305.

[21] Amit, K.C. and Kim, J.H. (2008). Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 2542-2565.

[22] Kim, J.H. and Amit, K.C. (2008). A generalized interaction integral method for the evaluation of the T-Stress in orthotropic functionally graded materials under thermal loading. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 75, pp. 051112: 1-11.

[23] Chen, W.Q., Ding, H.J. and Ling, D.S. (2004). Thermoelastic field of a transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution. *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp. 69-83.

[24] Hou, P.F., Leung, A.Y. and Chen, C.P. (2008). Fundamental solution for transversely isotropic thermoelastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 45, pp. 392-408.

[25] Williams, M.L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 24, pp. 109-114.

[26] Rungamornrat, J. and Pinitpanich, M. (2016). T-stress solution of penny-shaped cracks in transversely isotropic elastic media. *Engineering Fracture Mechanics*, 158, pp. 194-208.

[27] Rehman, A. and Khan, A. (2009). Speed of thermoelastic rayleigh wave in a transversely isotropic heat-conducting elastic material. *World Applied Sciences Journal*, 6, pp. 1681-1684.