An Approximate Method for Modal Analysis of Dynamic Structures

[1]

[1] สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง
E-mail address: tisadee.s@rumail.ru.ac.th

งานวิจัยนี้ศึกษาวิธีการวิเคราะห์โมดัลแบบประมาณของอาคารหลายชั้น พิจารณาผลของโหมดรูปร่างระดับสูงตามโหมดรูปร่างของน้ำหนักกระทำและความถี่ของน้ำหนักกระทำ การวิเคราะห์ผลตอบสนองของอาคารสูงมีหลายโหมดรูปร่างการวิเคราะห์โดยรวมผลทุกโหมดการสั่นอาจทำให้เสียเวลานานในการวิเคราะห์ใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์มากและเพิ่มความถูกต้องของผลตอบสนองไม่มาก จึงนิยมใช้การวิเคราะห์แบบประมาณสามารถทำโดยใช้ผลตอบสนองในช่วงโหมดการสั่นต่ำมาบวกกัน เช่น โหมดแรก สองโหมดแรก สามโหมดแรก งานวิจัยนี้จะตรวจสอบความประสิทธิภาพของการวิเคราะห์ดังกล่าว ตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคืออาคารห้าชั้นจำลองการวิเคราะห์โดยแบบจำลองอาคารห้าองศาอิสระวิเคราะห์โดยวิธีโมดัล โดยจะเปลี่ยนแปลงความถี่แรงกระทำแบบคาบและเปลี่ยนรูปแบบแรงกระทำ การคำนวณเชิงตัวเลขใช้วิธีของนิวมาร์ค ผลลัพธ์ของวิธีการที่เสนอมีความถูกต้องกว่าวิธีประมาณอื่น

คำสำคัญ: การวิเคราะห์แบบประมาณ,การวิเคราะห์วิธีโมดัล

Abstract

This research is to study an approximate modal analysis of multistory building. The higher mode effects will be considered, depend on a lateral load pattern and frequency domain of loading. An analysis of dynamic responses of tall building used much time, much memory consumption of computer and increased accuracy no much. The method of modal analysis of dynamic structure is based on the concept that the total response may be obtained from the contributions of equivalent single-degree-of-freedom (SDOF) modal systems, in combination with the technique of modal superposition. An approximate modal analysis method is a sum response of the first three translation modes of each building. This study is to investigate the performance of the method. An example of this study is five story building modeled by five degree of freedom load by periodic force vary in frequency domain and a lateral load pattern. Numerical method used Newmark method. The results of the proposed method are more accuracy than the other approximate methods.

Keywords: Approximate analysis, Modal analysis

1.

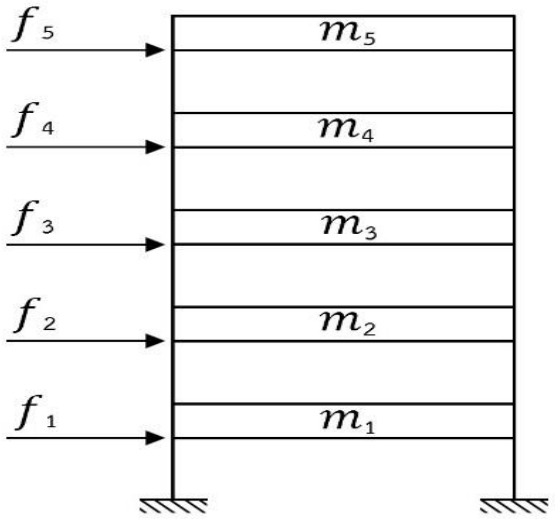
ปัจจุบันการเกิดแผ่นดินไหวเกิดขึ้นถี่ขึ้นเรื่อยๆ ประเทศไทยเริ่มเกิดแผ่นดินไหวที่ค่อนข้างอันตรายแล้วที่จังหวัดเชียงราย ยังมีรอยเลื่อนหลายแห่งในประเทศไทยและบริเวณประเทศข้างเคียงที่พลังสามารถทำให้เกิดแผ่นดินไหวที่รุนแรงได้ แผ่นดินไหวที่สำคัญของโลกที่ทำให้เกิดความเสียหายทั้งชีวิตและทรัพย์สินอย่างมาก คือที่แผ่นดินไหวโคลัมเบียและแผ่นดินไหวเฮติ ผลการสำรวจพบว่าอาคารที่เสียหายส่วนใหญ่เป็นอาคารขนาดเล็ก โดยเฉพาะบ้านพักอาศัยเนื่องจากไม่ได้ออกแบบรับแรงแผ่นดินไหวซึ่งคล้ายประเทศไทย การป้องกันไม่ให้อาคารที่อยู่อาศัยวิบัติจนเกิดการเสียชีวิตในงบประมาณที่พอสมควรจึงควรพิจารณา เนื่องจากอาคารได้ถูกสร้างแล้ว จึงมีการแก้ไขโดยการทำโครงเหล็กเสริมจะทำให้เสียรูปทางสถาปัตยกรรม ใช้กำแพงมาช่วยรับโดยการเสริมด้วยไฟเบอร์ แต่ไม่ว่าใช้มีวิธีใดก็ตามการใช้มวลหน่วงลดการสั่นไหวจะทำให้อาคารสามารถรับแผ่นดินไหวมีประสิทธิภาพได้ดีขึ้นอีกทั้งยังประหยัดงบประมาณด้วย การติดตั้งมวลหน่วงจะทำให้การคำนวณซับซ้อนซึ่งจะมีลักษณะคล้ายอาคารหลายชั้น การออกแบบมวลหน่วงที่เหมาะสมสามารถหาได้จากการออกแบบอาคารสูงหลายชั้นนั้นเอง

การวิเคราะห์โครงสร้างอาคารสูงเป็นการวิเคราะห์หลายตัวแปรโดยเฉพาะกรณีที่รับแรงกระทำพลศาสตร์จะต้องมีการวิเคราะห์ทำซ้ำหลายรอบ แม้ว่าปัจจุบันคอมพิวเตอร์จะมีประสิทธิภาพสูงแต่ยังคงใช้เวลามาก ปัญหานี้ถูกแก้ไขโดยการวิเคราะห์แบบประมาณใช้รูปร่างการสั่นที่ความถี่ต่ำหลายรูปร่างสำหรับการวิเคราะห์เพราะว่าโปรแกรมถูกออกแบบมาสำหรับรับแรงแผ่นดินไหว ซึ่งความถูกต้องในงานวิจัยนี้จะมีการตรวจสอบส่วนการวิเคราะห์รูปแบบแรงกระทำรูปอื่นการใช้รูปร่างการสั่นที่สูงกว่ามาวิเคราะห์อาจจะให้ค่าที่ถูกต้องมากกว่า สำหรับกรณีรูปแบบของน้ำหนักกระทำที่ใกล้เคียงกับรูปร่างการสั่นนั้นๆ

2.

2.1 การวิเคราะห์โครงสร้างรับแรงพลศาสตร์

งานวิจัยนี้จะใช้แบบจำลองระดับความเสรีเท่ากับห้า โดยจะไม่พิจารณาผลของความหน่วง โดยแรงกระทำภายนอกโครงสร้างเป็นแบบฮาร์มอนิก



รูปที่ 2.1 โครงสร้างหลายดีกรีอิสระ อาคาร 5 ชั้น

รูปที่ 2.1 คือแบบจำลองคณิตศาสตร์ของโครงสร้างห้าชั้นที่ใช้ในงานวิจัยนี้

โดยที่แต่ละชั้นมีน้ำหนัก(m) และแรงกระทำ(f)

สมการทั่วไปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างรับแรงพลศาสตร์

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{f(t)\}\sin(\omega t) \quad (1)$$

โดยที่

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

m_1 =มวลของชั้นที่1

$$\{x\}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

x_1 =การเคลื่อนที่ของชั้นที่1

$$[k]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix}$$

k_1 =สติฟเนสของชั้นที่1

$$[f(t)]=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

f_1 = แรงกระทำของชั้นที่1

ω = ความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำ

การวิเคราะห์วิธีโมดัลของโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง คือการวิเคราะห์หาผลตอบสนองการเคลื่อนที่ของโครงสร้างโดยการนำผลตอบสนองในทุกความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างมาบวกกัน สำหรับโครงสร้างที่มีจำนวนโหมดหลายโหมด อาจประมาณผลตอบสนองรวมจากการพิจารณาเฉพาะผลตอบสนองของโหมดต่ำๆได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้สามโหมดแรกเป็นการวิเคราะห์แบบประมาณโดยวิธีทั่วไป เปรียบเทียบกับการใช้โหมดอื่นที่สูงขึ้นตามความถี่ของแรงภายนอกกระทำ

การวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงตัวเลขจะใช้วิธีของนิวมาร์คและเขียนชุดคำสั่งในโปรแกรมแมทแลปหาคำตอบ

ผลกระทบของความถี่ของแรงภายนอกต่อผลตอบสนอง

จากสมการที่1 กรณีแบบจำลองระดับความเสรีเท่ากับหนึ่งจะได้ผลตอบสนองการเคลื่อนที่ตามสมการต่อไปนี้ สามารถหาอ่านได้จากหนังสือวิเคราะห์แรงสั่นสะเทือนทั่วไป

$$x=\frac{A_0}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\sin(\omega t) \quad (2)$$

โดยที่

x คือการเคลื่อนที่พลศาสตร์ของโครงสร้าง

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ คือความเร็วเชิงมุมของโครงสร้าง

$A_0=\frac{f}{k}$ คือขนาดการเคลื่อนที่แบบสถิตย์

จากสมการที่2 ผลตอบสนองการเคลื่อนที่พลศาสตร์ของโครงสร้างx ส่วนหนึ่งจะขึ้นกับอัตราส่วน $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ ถ้าเข้าใกล้หนึ่งมากจะมีขนาดใหญ่ แสดงให้เห็นว่าผลของการวิเคราะห์แบบโมดัลที่โหมดความเร็วเชิงมุมใกล้เคียงกับแรงกระทำสำคัญ จึงควรให้ความสำคัญด้วย

3.

โครงสร้างที่นำมาใช้ในงานวิจัยนีตามสมการที่1 มีคุณสมบัติดังนี้

$m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=$ 34560 กิโลกรัม

$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=$ 54884360 นิวตันต่อเมตร

แรงกระทำในแต่ละชั้นเท่ากับมวลของแต่ละชั้นคูณกับความเร่ง0.01g แรงกระทำแบบคาบเป็นฟังก์ชันไซด์ ไม่มีความหน่วง ตามเมตริกซ์ด้านบน เวลาที่รับแรงกระทำเท่ากับ 180 วินาที

จากข้อมูลมวลและค่าสติฟเนสจะได้ความเร็วเชิงมุมและโหมดรูปร่างดังนี้ความเร็วเชิงมุม ω =11.34, 33.10, 52.19, 67.05, 76.47 เรเดียนต่อวินาทีหรือ คาบการสั่น(T)= 0.554, 0.189, 0.12, 0.094, 0.082วินาทีโหมดรูปร่างจะได้

$$[\phi_1]=\begin{bmatrix} 0.1699 \\ 0.326 \\ 0.4557 \\ 0.5485 \\ 0.5969 \end{bmatrix} \quad [\phi_2]=\begin{bmatrix} -0.4557 \\ -0.5969 \\ -0.326 \\ 0.1699 \\ 0.5485 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_3]=\begin{bmatrix}0.5969\\0.1699\\-0.5485\\-0.326\\0.4557\end{bmatrix}\quad[\phi_4]=\begin{bmatrix}0.5485\\-0.4557\\-0.1699\\0.5969\\-0.326\end{bmatrix}$$

$$[\phi_5]=\begin{bmatrix}-0.326\\0.5485\\-0.5969\\0.4557\\-0.1699\end{bmatrix}$$

แรงที่จะนำมาวิเคราะห์แบ่งเป็นหลายกรณีดังนี้

รูปแบบแรงกระทำจะตามโหมดรูปร่าง

รูปแบบของแรง $[f]=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\end{bmatrix}$ ตามรูปแบบตามโหมดต่างๆ

แรงที่ใช้ในการศึกษานี้จะแบ่งเป็น 4 ชนิดเพื่อที่จะแสดงถึงผลของการที่ไม่วิเคราะห์โหมดรูปร่างระดับสูง

1. แรงกระทำที่มีรูปแบบกระทำเหมือนโหมดรูปร่างของโครงสร้าง
2. แรงกระทำที่เป็นการรวมกันของโหมดรูปร่างต่างๆ
3. แรงกระทำแบบสุ่มโดยเครื่องคิดเลข 3 ตัวอย่าง
4. แรงกระทำแผ่นดินไหว

ขนาดแอมพิจูด $0.01M_1g$ ฟังก์ชันคาบ $\sin(\omega t)$ ที่มีความเร็วเชิงมุม ω ของแรงพลศาสตร์

$[f_1]=[\phi_1]0.01M_1g\sin(\omega t)$ นิวตัน

ตารางที่3.1 การเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงกระทำที่มีรูปแบบโหมดที่ 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082
Total	0.1208	4.19E-05	1.39E-05	7.68E-06	5.67E-06
phi_1	0.1208	4.19E-05	1.39E-05	7.68E-06	5.67E-06
phi_2	0	0	0	0	0
phi_3	0	0	0	0	0
Mode1	0.1208	4.19E-05	1.39E-05	7.68E-06	5.67E-06
Mode2	0	0	0	0	0
Mode3	0	0	0	0	0
Mode4	0	0	0	0	0
Mode5	0	0	0	0	0

โดยที่

ω_1 หมายถึงความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำเท่ากับ 11.34 เรเดียนต่อวินาที หรือคาบแรงกระทำ 0.554 วินาที

ω_2 หมายถึงความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำเท่ากับ 33.10 เรเดียนต่อวินาทีหรือคาบแรงกระทำ 0.189 วินาที

ω_3 หมายถึงความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำเท่ากับ 52.19 เรเดียนต่อวินาที หรือคาบแรงกระทำ 0.12 วินาที

ω_4 หมายถึงความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำเท่ากับ 67.05 เรเดียนต่อวินาทีหรือคาบแรงกระทำ 0.094 วินาที

ω_5 หมายถึงความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำเท่ากับ 76.47 เรเดียนต่อวินาที หรือคาบแรงกระทำ 0.082 วินาที

Total หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบสมบูรณ์ไม่ใช่การวิเคราะห์แบบประมาณ

Phi_1 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้สามโหมดแรก คือโหมดที่หนึ่ง โหมดที่สอง และโหมดที่สาม

Phi_2 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้สามโหมดถัดจากโหมดแรกไปหนึ่งโหมด คือโหมดที่สอง โหมดที่สามและโหมดที่สี่

Phi_3 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้สามโหมดแรกถัดจากโหมดแรกไปสองโหมด คือโหมดที่สาม โหมดที่สี่ และโหมดที่ห้า

Mode1 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้โหมดที่หนึ่ง

Mode2 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้โหมดที่สอง

Mode3 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้โหมดที่สาม

Mode4 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้โหมดที่สี่

Mode5 หมายถึงการวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบประมาณโดยใช้โหมดที่ห้า

วิเคราะห์ผลตารางที่ 3.1

อาคารห้าชั้นเมื่อรับแรงกระทำพลศาสตร์รูปแบบที่1หรือโหมดที่1

$[f_1]=[\phi_1]0.01M_1g\sin(\omega t)$

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega=\omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบสมบูรณ์มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0.1208 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งและมีความเร็วเชิงมุมในโหมดหนึ่งของโครงสร้าง จะทำให้เกิดการสั่นพ้องเกิดการเคลื่อนที่มากจนกระทั่งเกิดการวิบัติได้

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega=\omega_2$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบสมบูรณ์มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 4.19E-05เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งแต่มีความเร็วเชิงมุมในโหมดสองของโครงสร้าง ไม่ทำให้เกิดการสั่นพ้องเกิดการเคลื่อนที่จึงไม่มาก

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega=\omega_3$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบสมบูรณ์มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 1.39E-05 เมตรเนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งแต่มีความเร็วเชิงมุมในโหมดสามของโครงสร้าง ไม่ทำให้เกิดการสั่นพ้องเกิดการเคลื่อนที่จึงไม่มาก

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega=\omega_4$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบสมบูรณ์มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 7.68E-06 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งแต่มีความเร็วเชิงมุมในโหมดสี่ของโครงสร้าง ไม่ทำให้เกิดการสั่นพ้องเกิดการเคลื่อนที่จึงไม่มาก

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega=\omega_5$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบสมบูรณ์มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 5.67E-06 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งแต่มีความเร็วเชิงมุมในโหมดห้าของโครงสร้าง ไม่ทำให้เกิดการสั่นพ้องเกิดการเคลื่อนที่จึงไม่มาก

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega=\omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบPHI_1 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0.1208 เมตรใกล้เคียงกับการวิเคราะห์แบบสมบูรณ์ เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์

ประมาณสามโหมดแรกนี้มีโหมดหนึ่งอยู่ด้วยจึงให้ค่าเท่ากัน ส่วนโหมดอื่นให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากแต่ละโหมดจะตั้งฉากกัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบPHI_2 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณสามโหมดถัดจากสามโหมดแรกนี้มีหนึ่งโหมด ไม่มีโหมดหนึ่งเหมือนกับแรงกระทำจึงให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากโหมดอื่นจะตั้งฉากกัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบPHI_3 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณสามโหมดถัดจากสามโหมดแรกนี้มีสองโหมด ไม่มีโหมดหนึ่งเหมือนกับแรงกระทำจึงให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากโหมดอื่นจะตั้งฉากกัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบMODE1 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0.1208 เมตรใกล้เคียงกับการวิเคราะห์แบบสมบูรณ์ เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณโดยใช้โหมดหนึ่งจึงให้ค่าเท่ากัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบMODE2 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณโดยใช้โหมดสองจึงให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากจะตั้งฉากกัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบMODE3 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณโดยใช้โหมดสามจึงให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากจะตั้งฉากกัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบMODE4 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณโดยใช้โหมดสี่จึงให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากจะตั้งฉากกัน

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยวิธีโมดัลแบบMODE5 มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 0 เมตร เนื่องจากรูปแบบแรงกระทำพลศาสตร์ในโหมดหนึ่งการวิเคราะห์ประมาณโดยใช้โหมดห้าจึงให้ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากจะตั้งฉากกัน

ตารางที่3.2 การเคลื่อนที่ของชั้นที่5 เนื่องจากแรงกระทำที่มีรูปแบบโหมดที่ 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082
Total	0.4245	1.47E-04	4.87E-05	2.70E-05	1.99E-05
phi_1	0.4245	1.47E-04	4.87E-05	2.70E-05	1.99E-05
phi_2	4.45E-20	2.73E-19	0	0	0
phi_3	1.79E-20	1.96E-20	0	0	0
Mode1	0.4245	1.47E-04	4.87E-05	2.70E-05	1.99E-05
Mode2	2.48E-20	2.24E-19	0	0	0
Mode3	2.63E-20	2.40E-20	0	0	0
Mode4	6.23E-21	5.97E-21	0	0	0
Mode5	8.25E-22	2.24E-21	0	0	0

ตารางที่ 3.2 แสดงการเคลื่อนที่ของชั้นที่5 เนื่องจากแรงกระทำรูปแบบโหมดที่1 มีหน่วยเป็นเมตรผลการวิเคราะห์ความหมายเหมือนกับชั้นที่ 1ซึ่งอธิบายโดยละเอียดแล้ว เป็นการแสดงให้เห็นผลการเคลื่อนที่ของชั้น5 เท่านั้น

ผลการวิเคราะห์จากรูปแบบแรงกระทำที่6

$$[f_6] = \frac{1}{2}[\phi_1 + \phi_2]0.01M_1 g\sin(\omega t)$$ นิวตัน

ตารางที่3.3 การเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงกระทำที่มีรูปแบบที่ 6

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082
Total	6.04E-02	4.50E-03	4.87E-05	3.84E-05	3.71E-05
phi_1	6.04E-02	4.50E-03	4.87E-05	3.84E-05	3.71E-05
phi_2	3.33E-05	4.50E-03	4.81E-05	3.83E-05	3.73E-05
phi_3	0	0	0	0	0
Mode1	0.0604	2.10E-05	6.93E-06	3.84E-06	2.83E-06
Mode2	3.33E-05	4.50E-03	4.81E-05	3.83E-05	3.73E-05
Mode3	0	0	0	0	0
Mode4	0	0	0	0	0
Mode5	0	0	0	0	0
Mode1+2	6.04E-02	4.50E-03	4.87E-05	3.84E-05	3.71E-05

ตารางที่ 3.3 แสดงการเคลื่อนที่ของชั้นที่1 เนื่องจากแรงกระทำรูปแบบที่ 6 เป็นผลบวกของแรงโหมดที่1กับโหมดที่2หารด้วยสอง มีหน่วยเป็นเมตรผลการวิเคราะห์จะมีความหมายเหมือนตาราง3.1 งานวิจัยได้วิเคราะห์ผลรวมของแต่ละโหมดไว้มากแต่ผลการวิเคราะห์ไม่สำคัญ จึงแสดงตัวอย่างเดียว

ฟังก์ชันแรงพลศาสตร์แบบสุ่มที่ 1 จะใช้เครื่องคำนวณสุ่มเลขห้าเลข

$$[f_{R1}] = [\phi_{R1}]0.01M_1 g\sin(\omega t)$$ นิวตัน

โดยที่

$[f_{R1}]$ = แรงแบบสุ่มที่ 1

$[\phi_{R1}]$ = ฟังก์ชันแรงหนึ่งหน่วยในแต่ละชั้น

$$[\phi_{R1}] = \begin{bmatrix} 0.2217 \\ 0.6019 \\ 0.2935 \\ 0.7015 \\ 0.10016 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_{R1}] = 0.813\phi_1 - 0.381\phi_2 - 0.109\phi_3 + 0.183\phi_4 + 0.385\phi_5$$

พิจารณาฟังก์ชัน $[\phi_{R1}]$มีแรงสัมบูรณ์ในโหมดหนึ่ง 0.813 แรงในโหมดสอง 0.381 แรงในโหมดสาม 0.109 แรงในโหมดสี่ 0.183 และแรงในโหมดห้า 0.385

พิจารณาฟังก์ชัน $[\phi_{R1}]$งานวิจัยนี้จะเลือกใช้โหมดในการคำนวณโดยประมาณ สองโหมดที่ขนาดสัมบูรณ์มากที่สุด คือ โหมดหนึ่งและโหมดห้า ส่วนอีกโหมดหนึ่งจะใช้โหมดเดียวกับความถี่ของแรงพลศาสตร์

ตารางที่3.4 การเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงกระทำที่มีรูปแบบสุ่มที่ 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082
Total	0.0982	0.0034	2.09E-04	1.44E-04	8.73E-05
phi_1	0.0982	0.0034	2.07E-04	1.89E-05	1.41E-05
phi_2	2.26E-05	0.0034	2.14E-04	1.25E-04	2.21E-05
phi_3	3.82E-06	9.26E-06	2.14E-04	1.37E-04	9.33E-05
Mode1	9.82E-02	3.41E-05	1.13E-05	6.24E-06	4.61E-06
Mode2	2.19E-05	3.40E-03	2.12E-05	9.85E-06	6.88E-06
Mode3	3.26E-06	7.12E-06	2.07E-04	9.56E-06	7.01E-06
Mode4	2.39E-06	3.60E-06	9.02E-06	1.16E-04	1.20E-05
Mode5	2.72E-06	4.38E-06	7.69E-06	2.07E-05	8.79E-05
งานวิจัย	9.82E-02	3.40E-03	2.06E-04	1.40E-04	8.75E-05

ตารางที่ 3.4 แสดงการเคลื่อนที่ของชั้นที่5 เนื่องจากแรงกระทำแบบสุ่มที่1 มีหน่วยเป็นเมตรผลการวิเคราะห์จะคล้ายกับตารางที่ 3.1

ความเร็วเชิงมุมของแรง $\omega = \omega_1$ วิเคราะห์โดยงานวิจัยนี้ มีการเคลื่อนที่ชั้นที่ 1 เท่ากับ 9.82E-02 เมตร ซึ่งเท่ากับการวิเคราะห์แบบสมบรูณ์ การที่มีใช้แรงกระทำสมมติแบบนี้เพื่อเป็นตัวแทนของแรงที่อาจจะเกิดขึ้นกับโครงสร้างแบบคาดไม่ถึง

กรณีMode1 วิเคราะห์แบบประมาณโดยใช้สามโหมดแรก สังเกตว่าแรงกระทำแบบสุ่มนี้มีขนาดในโหมดที่หนึ่งกับสองมากเมื่อความถี่ของแรงกระทำสุ่มอยู่ที่โหมดหนึ่งสองจะให้ค่าความแม่นยำมาก แต่กรณีที่ความถี่ของแรงกระทำอยู่ที่โหมดสี่กับโหมดห้าความแม่นยำจะน้อยลง แสดงให้เห็นชัดเจนว่าการออกแบบรับแรงความถี่สูงการใช้โหมดสามโหมดแรกมาวิเคราะห์อาจจะไม่เหมาะสม แต่ถ้าใช้ผลตอบสนองของโหมดที่ใกล้เคียงคาบแรงกระทำจะใช้ผลใกล้เคียงกว่าตามตารางที่ 3.5

ตารางที่3.5เปรียบเทียบร้อยละการเคลื่อนที่ของชั้นที่1เนื่องจากแรงแบบสุ่มที่ 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ค่าเฉลี่ย
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082	
Total	100	100	100	100	100	100
phi_1	100	100	98.76	13.14	16.13	65.61
phi_2	0.02	100	102.25	86.84	25.30	62.88
phi_3	0.00	0.27	102.21	95.30	106.81	60.92
Mode1	100	1.00	5.38	4.34	5.28	23.20
Mode2	0.02	100	10.10	6.85	7.88	24.97
Mode3	0.00	0.21	98.71	6.65	8.03	22.72
Mode4	0.00	0.11	4.31	80.47	13.80	19.74
Mode5	0.00	0.13	3.67	14.39	100.65	23.77
งานวิจัย	100	100	98.20	97.52	100.19	99.18

ตารางที่3.5 แสดงค่าเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของชั้นที่1 เนื่องจากแรงกระทำแบบสุ่มที่1 มีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

สำหรับการสั่นแบบทราบความเร็วเชิงมุมในการสั่นไหวของแรงกระทำแบบสุ่มที่1 การวิเคราะห์แบบประมาณของงานวิจัยนี้ให้ค่าเฉลี่ยความแม่นยำสูงที่สุด 99.18 %

ฟังก์ชันแรงพลศาสตร์แบบสุ่มที่ 2

$$[f_{R2}] = [\phi_{R2}]0.01M_1 g\sin(\omega t) \text{ นิวตัน}$$

โดยที่

$[f_{R2}]$ = แรงแบบสุ่มที่ 2

$[\phi_{R2}]$ = ฟังก์ชันแรงหนึ่งหน่วยในแต่ละชั้น

$$[\phi_{R2}] = \begin{bmatrix} 0.4298 \\ 0.5580 \\ 0.6204 \\ 0.2714 \\ 0.213 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_{R2}] = 0.814\phi_1 - 0.568\phi_2 + 0.196\phi_3 - 0.314\Phi_4 - 0.117\phi_5$$

จาก $[\phi_{R2}]$ มีแรงสัมบูรณ์ในโหมดหนึ่ง 0.814 แรงในโหมดสอง 0.568 แรงในโหมดสาม 0.196 แรงในโหมดสี่ 0.314 และแรงในโหมดห้า 0.117 พิจารณาฟังก์ชัน

$$[\phi_{R2}] = 0.814\phi_1 - 0.568\phi_2 + 0.196\phi_3 - 0.314\Phi_4 - 0.117\phi_5$$

งานวิจัยนี้จะเลือกใช้โหมดในการคำนวณโดยประมาณ สองโหมดที่ขนาดสัมบูรณ์มากที่สุดคือ โหมดหนึ่งและโหมดสอง ส่วนอีกโหมดหนึ่งจะใช้โหมดเดียวกับความถี่ของแรงพลศาสตร์

ตารางที่3.6 การเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงกระทำที่มีรูปแบบสุ่มที่ 2

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082
Total	9.83E-02	5.10E-03	7.66E-05	2.45E-05	3.94E-05
phi_1	9.83E-02	5.10E-03	7.64E-05	2.15E-05	1.55E-05
phi_2	3.28E-05	5.10E-03	7.02E-05	2.05E-05	1.14E-05
phi_3	4.50E-05	1.77E-06	3.79E-05	2.56E-05	2.68E-05
Mode1	9.83E-02	3.41E-05	1.13E-05	6.25E-06	4.61E-06
Mode2	3.26E-05	5.10E-03	3.15E-05	1.47E-05	1.03E-05
Mode3	4.92E-07	1.01E-06	3.69E-05	1.20E-06	6.81E-07
Mode4	4.96E-07	8.61E-07	1.92E-06	2.03E-05	2.59E-06
Mode5	6.80E-07	9.14E-07	1.70E-05	5.48E-06	2.58E-05
งานวิจัย	9.83E-02	5.10E-03	7.64E-05	2.11E-05	3.89E-05

ตารางที่3.6 แสดงค่าการเคลื่อนที่ของชั้นที่1 เนื่องจากแรงกระทำรูปแบบสุ่มที่2 มีหน่วยเป็นเมตร การวิเคราะห์แรงกระทำแบบสุ่ม2 เพื่อตรวจสอบแนวทางการวิเคราะห์โดยใช้โหมดที่ใกล้เคียงกับความถี่ของแรงกระทำ ผลที่ได้แสดงให้เห็นชัดเจนในตารางที่ 3.7

ตารางที่3.7 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงแบบสุ่มที่ 2

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ค่าเฉลี่ย
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082	
Total	100	100	100	100	100	100
phi_1	100	100	99.74	87.93	39.28	85.39
phi_2	0.03	100	91.61	83.70	28.82	60.83
phi_3	0.04	0.03	49.48	104.59	67.95	44.42
Mode1	100	0.67	14.72	25.53	11.71	30.53
Mode2	0.03	100	41.16	60.00	26.06	45.45
Mode3	0.00	0.02	48.11	4.91	1.73	10.95
Mode4	0.00	0.02	2.50	83.01	6.57	18.42
Mode5	0.00	0.02	22.14	22.42	65.44	22.00
งานวิจัย	100	100	99.74	86.14	98.65	96.91

ตารางที่3.7 แสดงค่าเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของชั้นที่1 เนื่องจากแรงกระทำแบบสุ่มที่2 มีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

สำหรับการสั่นแบบทราบความเร็วเชิงมุมในการสั่นไหวของแรงแบบสุ่มที่ 1 การวิเคราะห์แบบประมาณของงานวิจัยนี้ให้ค่าเฉลี่ยความแม่นยำสูงที่สุด 96.91 %

ฟังก์ชันแรงพลศาสตร์แบบสุ่มที่ 3

$$[f_{R3}] = [\phi_{R3}]0.01M_1 g\sin(\omega t) \text{ นิวตัน}$$

โดยที่

$[f_{R3}]$ = แรงแบบสุ่มที่ 3

$[\phi_{R3}]$ = ฟังก์ชันแรงหนึ่งหน่วยในแต่ละชั้น

$$[\phi_{R3}] = \begin{bmatrix} 0.3119 \\ 0.3574 \\ 0.2417 \\ 0.3732 \\ 0.7598 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_{R3}] = 0.938\Phi_1 + 0.046\Phi_2 + 0.339\Phi_3 - 0.058\Phi_4 - 0.009\Phi_5$$

$[\phi_{R3}]$ มีแรงสัมบูรณ์ในโหมดหนึ่ง 0.9379 แรงในโหมดสอง 0.0459 แรงในโหมดสาม 0.3389 แรงในโหมดสี่ 0.0578 และแรงในโหมดห้า 0.0089

พิจารณาฟังก์ชัน $[\phi_{R3}]$ งานวิจัยนี้จะเลือกใช้โหมดในการคำนวณโดยประมาณ สองโหมดที่ขนาดสัมบูรณ์มากที่สุด คือ โหมดหนึ่งและโหมดสาม ส่วนอีกโหมดหนึ่งจะใช้โหมดเดียวกับความถี่ของแรงพลศาสตร์

ตารางที่3.8 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงแบบสุ่มที่ 3

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ค่าเฉลี่ย
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082	
Total	100	100	100	100	100	100
phi_1	100	100.23	99.53	74.70	93.08	93.51
phi_2	0.01	98.34	98.56	104.49	75.98	75.47
phi_3	0.01	3.97	98.08	96.40	70.49	53.79
Mode1	100	9.05	1.99	18.30	25.80	31.03
Mode2	0.00	94.57	0.68	8.93	16.61	24.16
Mode3	0.01	4.03	97.58	52.70	57.05	42.27
Mode4	0.00	0.36	0.54	95.07	23.12	23.82
Mode5	0.00	0.02	0.02	1.06	9.54	2.13
งานวิจัย	100	100.23	99.40	92.25	89.72	96.32

ตารางที่3.8 แสดงค่าเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของชั้นที่1 เนื่องจากแรงกระทำรูปแบบสุ่มที่3 มีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

สำหรับการสั่นแบบทราบความเร็วเชิงมุมในการสั่นไหวของแรงกระทำแบบสุ่มที่ 3 การวิเคราะห์แบบประมาณของงานวิจัยนี้ให้ค่าเฉลี่ยความแม่นยำสูงที่สุด 96.32 %

ฟังก์ชันแรงพลศาสตร์แบบคาบที่ฐาน (แรงแผ่นดินไหว)

$[f_e] = [\phi_e]0.01M_1 g\sin(\omega t)$ นิวตัน

โดยที่

$[\mathbf{f_e}]$ = แรงแผ่นดินไหว

$[\boldsymbol{\phi}_\mathbf{e}]$ = ฟังก์ชันแรงหนึ่งหน่วยในแต่ละชั้น

$$[\phi_e] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_e] = 0.9378\phi_1 - 0.2953\phi_2 + 0.1556\phi_3 + 0.0867\phi_4 - 0.0396\phi_5$$

พิจารณา $[\phi_e]$ มีแรงสัมบูรณ์ในโหมดหนึ่ง 0.9378 แรงในโหมดสอง 0.2953 แรงในโหมดสาม 0.1556 แรงในโหมดสี่ 0.0867 และแรงในโหมดห้า 0.0396

พิจารณาฟังก์ชัน $[\phi_e]$ งานวิจัยนี้จะเลือกใช้โหมดในการคำนวณโดยประมาณ สองโหมดที่ขนาดสัมบูรณ์มากที่สุด คือ โหมดหนึ่งและโหมดสอง ส่วนอีกโหมดหนึ่งจะใช้โหมดเดียวกับความถี่ของแรงพลศาสตร์

ตารางที่3.9 การเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงกระทำแบบคาบที่ฐาน

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082
Total	0.1133	0.0026	3.13E-04	7.53E-05	2.65E-05
phi_1	0.1133	0.0026	3.17E-04	2.34E-05	1.59E-05
phi_2	2.19E-05	0.0026	3.06E-04	7.00E-05	1.59E-05
phi_3	5.25E-06	9.95E-06	2.90E-04	6.21E-05	1.94E-05
Mode1	0.1133	3.93E-05	1.30E-05	7.20E-06	5.32E-06
Mode2	1.69E-05	0.0026	1.64E-05	7.63E-06	5.33E-06
Mode3	3.90E-06	8.04E-06	2.92E-04	9.52E-06	5.40E-06
Mode4	1.13E-06	1.70E-06	4.27E-06	5.47E-05	5.70E-06
Mode5	2.30E-07	3.10E-07	5.75E-07	1.86E-06	8.73E-06
งานวิจัย	0.1133	0.0026	3.17E-04	6.65E-05	1.86E-05

ตารางที่3.9 แสดงค่าการเคลื่อนที่ของชั้นที่1 เนื่องจากแรงแผ่นดินไหวแบบคาบฟังก์ชันไซน์ มีหน่วยเป็นเมตร สังเกตรูปแบบแรงกระทำแผ่นดินไหวจะอยู่ที่โหมดหนึ่งและโหมดสอง เพราะฉะนั้นการวิเคราะห์แบบประมาณโดย

จะให้คาดอนข้างแม่นยำทุกคาบความถี่ของแรงกระทำตามตารางที่3.10

ตารางที่3.10 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของชั้นที่ 1 เนื่องจากแรงแผ่นดินไหว

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ค่าเฉลี่ย
T(s)	0.554	0.189	0.12	0.094	0.082	
Total	100	100	100	100	100	100
phi_1	100	100	101.25	31.11	60.04	78.48
phi_2	0.02	100	97.70	92.86	60.04	70.12
phi_3	0.00	0.38	92.77	82.45	73.16	49.75
Mode1	100	1.51	4.16	9.56	20.03	27.05
Mode2	0.01	100	5.24	10.13	20.09	27.10

4.3 จากตารางที่3.3

ω_1 Phi_1 Phi_2 Total *Mode1*

ω_2 Phi_1 Phi_2 Total *Mode2*

4.4 จากตารางที่ 3.5,3.7,3.8

4.5 จากตารางที่ 3.9

Phi_1

4.6 จากตารางที่ 3.10

91.90

5.

แนวคิดการวิเคราะห์แบบประมาณที่เสนอในงานวิจัยนี้คือการวิเคราะห์เบื้องต้นแรงกระทำต่อโครงสร้างพลศาสตร์ โดยพิจารณาแตกเป็นขนาดในแต่ละโหมด แล้วนำโหมดที่มีขนาดสูงสองโหมดแรกมาคำนวณ โหมดที่สามคือโหมดของความถี่สั่นพ้องของโครงสร้าง ผลการวิเคราะห์กรณีแรงกระทำแบบสุ่มสามชุด และแรงแผ่นดินไหว ที่ทุกความถี่สั่นพ้องของโครงสร้างระดับเสรีอิสระเท่ากับห้า งานวิจัยนี้ให้ค่าความเฉลี่ยเทียบกับการวิเคราะห์แบบสมบูรณ์ที่สุดสำหรับโครงสร้างและรูปแบบกระทำในงานวิจัย

โครงสร้างที่งานวิจัยนี้พิจารณารวมถึงรูปแบบของแรงกระทำของโครงสร้างอาจจะไม่ครอบคลุมเพียงพอ ควรจะมีวิธีพัฒนาการวิเคราะห์แบบประมาณได้ดีกว่านี้

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องมาจากการสนับสนุนและส่งเสริมการทำวิจัยของมหาวิทยาลัยรามคำแหงและคณะวิศวกรรมศาสตร์

ขอขอบพระคุณคณะกรรมการการประชุมวิชาการโยธาแห่งชาติครั้งที่ 27 ทุกท่านที่ได้ตรวจสอบและให้คำแนะนำการจัดทำบทความ

[1] Balakumar Balachandran and Edward B. Magrab (2009) Vibrations. Cengage Learning, USA.

[2] Den Hartog (1947). Mechanical Vibrations. McGraw-Hill, NY.

[3] Leonard Meirovitch (2001). Fundamentals of Vibrations. McGraw-Hill, Singapore

[4] Seymour M. J. Spence , Massimiliano Gioffrè and Vittorio Gusella (2008). INFLUENCE OF HIGHER MODES ON THE DYNAMIC RESPONSE OF IRREGULAR AND REGULAR TALL BUILDINGS BBAA VI International Colloquium on: Bluff Bodies Aerodynamics & Applications Milano, Italy

[5] VICKERY P.J., STECKLEY A.C., ISYUMOV N., VICKERY B.J., “The effect of mode shape on the wind induced response of tall buildings”, Proceedings of the 5th United States National Conference on wind engineering, Lubbock, Texas, 1B-41-1B-48, 1985.

[6] พงษ์ธร จาฎุพจน์ (2543). การศึกษามวลหน่วงปรับค่าสำหรับควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างอินอิลาสติก :วิทยานิพนธ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[7] พินิต บุญยัง (2544). ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงรูปแบบอินอีลาสติกต่อสมรรถนะของมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ :วิทยานิพนธ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[8] เดช พุทธเจริญทอง (2542). การวิเคราะห์โครงสร้างพลศาสตร์. ศูนย์ส่งเสริมกรุงเทพ.

[9] ทฤษฎี สิงห์ศิลารักษ์ (2558). การวิเคราะห์โมดัลแบบประมาณโดยใช้โหมดรูปร่างใกล้เคียงกับรูปแบบแรงกระทำ การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 20

[10] ปณิธาน ลักคุณะประสิทธิ์, อาณัติ เรืองรัศมี, ฉัตรพันธ์ จินตนาภักดี, หทัยรัตน์ มณีเทศ เอกสารประกอบโครงการอบรมภาควิชาวิศวกรรมโยธาการออกแบบโครงสร้างต้านทานแผ่นดินไหว ครั้งที่ 5

[11] เป็นหนึ่ง วานิชชัย (2557). ผลของโหมดการสั่นระดับสูงต่อผลตอบสนองของอาคารสูง การประชุมวิชาการ วิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 19