

การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้โดยใช้วิธียิงเป้า Large Deflection Analysis of Beam with Movable Support using Shooting Method

วันวิสา รักษาสุข¹ อภิญญา ศิริศรีรัตน² ปฎิญา แก้วคุณ³ สุธาวัส จันทร์เรือง⁴ และ การันต์ คล้ายจำ^{5,*}

^{1,2,3,5} ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ.นครปฐม

⁴ ภาควิชาวิทยาศาสตร์ประยุกต์และสังคม วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กทม.

*Corresponding author; E-mail address: karun.kl@ku.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบ ซึ่งคานรับน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน และมีแรงอัดที่ปลายคานกระทำตามแนวราบ สมการครอบคลุมปัญหาของคานสร้างจากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างคานและการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ผลคำตอบเชิงตัวเลขหาได้โดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้าซึ่งตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลการศึกษาเชิงตัวเลขมุ่งเน้นศึกษาผลกระทบของน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอและค่าแรงอัดที่จุดรองรับต่อพฤติกรรมการโก่งคางของคาน ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า น้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอและแรงอัดที่ปลายคาน ส่งผลทำให้จุดรองรับของคานเคลื่อนที่และคานสูญเสียเสถียรภาพ

คำสำคัญ : การแอ่นตัวมาก, พฤติกรรมการโก่งคาง, ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, ระเบียบวิธียิงเป้า

Abstract

This research presents a large deflection analysis of beams with free horizontally sliding support, which is subjected to a uniformly distributed load and horizontal compression at the beam tip. The governing equations of the beam are derived by considering the differential geometry relations of the beam segment in a plane curve and the equilibrium of force and moment. The set of governing equation yields the system of nonlinear first-order differential equations, which are categorized as two-point boundary value problem. The numerical solution can be solved by using the shooting method, which is verified by the results obtained from the finite element method. This numerical investigation attempts to study the effects of the uniformly distributed load, and the horizontal compression force at the support on the large deflection and buckling behaviors of the beam. The numerical results showed that the uniformly distributed load and compression cause the support movement and induce an instability of the beam.

Keywords: Buckling Behavior, Finite Element Method, Shooting Method, Large Deflection

1. บทนำ

การวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของคานได้รับความสนใจจากนักวิจัยอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบันโดยอาศัยหลักการ *Elastica* เป็นทฤษฎีพื้นฐาน ซึ่งนิยมประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาแบบต่างๆ ได้แก่ คานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ คานยื่น และคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้ ตัวอย่างงานวิจัยประเภทนี้ได้แก่ งานวิจัยของสุรพันธ์ บุญเจริญ [1] ซึ่งได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนอย่างอิสระโดยใช้วิธีอิลิปติกอนทิกรัลในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข อย่างไรก็ตามวิธีการที่ไม่ได้พิจารณาแรงกระทำด้านข้างเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ธนภัทร วัฒนาบุญศิริ และคณะ [2] ได้ศึกษาแรงอัดวิกฤตของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยวิธียิงเป้าสำหรับหาค่าตอบเชิงตัวเลข ซึ่งผลการวิเคราะห์พบว่าน้ำหนักบรรทุกด้านข้างส่งผลให้แรงอัดวิกฤตของโครงสร้างลดลง สุนิสา รอดสังวาล [3] ได้ศึกษาและวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Wang และคณะ [4] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใดๆของคาน ณัฐพัชร จันทรกุลมณี [5] ได้ศึกษาผลกระทบของจุดรองรับแบบต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งคางของอิลาสติกคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุน ศรีณย์ ชุ่มกลัด [6] ได้ศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักของตัวเอง Areiza-Hurtado และ Aristizábal-Ochoa [7] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานและเสาที่มีหน้าตัดคงที่และหน้าตัดที่มีความลึกไม่สม่ำเสมอโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ McHugh และ Dowell [8] ได้ศึกษาการตอบสนองของคานยื่นและการแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายอิสระทุกด้าน Jeong และ Yoo [9] ได้สร้างแบบจำลองของคานที่มีการแอ่นตัวมากโดยใช้วิธี Assumed mode method งานวิจัยของ Masjedi และ Weaver [10] ได้ใช้วิธี Homotopy analysis method เพื่อหาสมการแม่นยำตรงของปัญหาคานที่มีการแอ่นตัวมาก Patel และ Srinivasan [11] วิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานโดยใช้วิธี Couple stress theory โดยได้สมการในการประมาณค่าความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ของคาน และงานวิจัยของ Giraldo-Londono และคณะ [12] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมหลังการโก่งคางของคาน-เสาที่มีจุดต่อแบบกึ่งแข็งโดยรวมผลกระทบตามแนวแกนและการเสียน อย่างไรก็ตามงานวิจัยในอดีตยังไม่ได้ศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับสามารถเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้

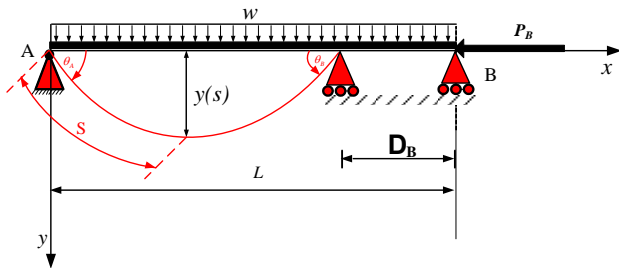
แรงอัดที่ปลายคานและรวมผลกระทบจากน้ำหนักบรรทุกทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ

ตั้งนันทงานวิจัยนี้ ได้ใช้หลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์สำหรับสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานช่วงเดียวที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงกระทำด้านข้างและแรงอัดที่ปลาย ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น และหาคำตอบของสมการด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยวิธีการยิงเป้า (Shooting method: SM) จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้กับงานวิจัยของอัญญลักษณ์ วงษ์นุช และคณะ [13] ซึ่งวิเคราะห์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method: FEM) ซึ่งเป็นแบบจำลองในระบบพิกัดอินทรีนิก ($\theta(s)$) ที่พัฒนาขึ้นโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน โดยพิจารณาพลังงานความเครียดเนื่องจากการดัดของคานและงานภายนอกเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอและแรงอัดที่ปลายคาน ในกระบวนการ FEM นี้ได้ใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่ 3 ในการประมาณค่ามุมหมุนของคาน

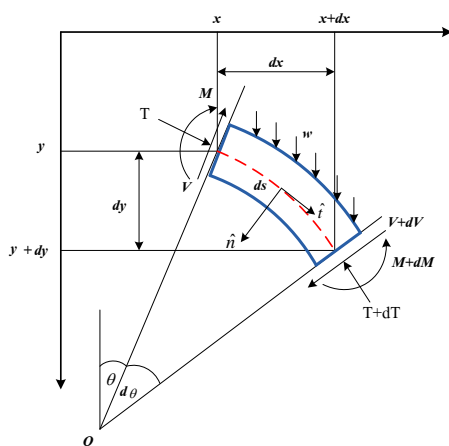
2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการหาคำตอบเชิงตัวเลข

2.1 ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตและสมการสมดุลของคาน

รูปที่ 1 แสดงลักษณะทางกายภาพของโครงสร้างคานที่มีจุดรองรับทั้ง 2 ด้านอยู่ในระดับเดียวกัน ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน (w) และแรงอัดที่จุดรองรับ B (P_B) ซึ่งเป็นจุดรองรับที่เคลื่อนที่ได้อิสระตามแนวราบ และทำให้คานเกิดการแอ่นตัว y ความยาวคานมีค่าคงที่เท่ากับ L ภายใต้แรงกระทำดังกล่าว ทำให้จุดรองรับด้านขวาของคานเคลื่อนที่ไปเท่ากับ Δ_B และคานแอ่นตัวจากตำแหน่งก่อนการเสียรูปไปยังสภาวะสมดุลสถิตย์ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ลักษณะการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้



รูปที่ 2 มังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน

รูปที่ 2 แสดงมังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีความยาวส่วนโค้งน้อยๆ (ds) จากรูปนี้ ระบบสมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบโดยอ้างอิงทฤษฎีอิลาสติกสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (1ก)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (1ข)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa = -\frac{M}{EI} \quad (1ค)$$

โดยตัวแปร θ คือมุมระหว่างแนวราบกับแนวเส้นสัมผัสของคาน s คือพิกัดตามความยาวส่วนโค้งของคาน x คือพิกัดตามระยะในแนวราบของคาน ตัวแปร E และ I คือโมดูลัสยืดหยุ่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน ตามลำดับ และ M คือโมเมนต์ดัด

จากรูปที่ 2 สมการสมดุลของคานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยสมการสมดุลของแรงตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสียรูปของคานดังสมการที่ (2ก) และ (2ข) ตามลำดับ ขณะที่สมการที่ (2ค) คือสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O

$$\sum F_t = 0; \quad \frac{dT}{ds} = -V \frac{d\theta}{ds} + w \sin \theta \quad (2ก)$$

$$\sum F_n = 0; \quad \frac{dV}{ds} = T \frac{d\theta}{ds} - w \cos \theta \quad (2ข)$$

$$\sum M_o = 0; \quad \frac{dM}{ds} = V \quad (2ค)$$

ตัวแปร T และ V คือแรงอัดตามแนวแกน และแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่างๆของคาน ตามลำดับ

เนื่องจากสมการที่ (1) และ (2) เป็นระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงเหมาะที่จะหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ จำเป็นต้องจัดให้อยู่ในรูปของสมการไร้หน่วย โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการต่อไปนี้

$$\hat{s} = \frac{s}{L}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L} \quad (3ก-ง)$$

$$\hat{w} = \frac{wL^3}{EI}, \quad \hat{T} = \frac{TL^2}{EI}, \quad \hat{V} = \frac{VL^2}{EI}, \quad \hat{M} = \frac{ML}{EI} \quad (3จ-ฉ)$$

ตัวแปร \hat{s} คือค่าพิกัดตามความยาวส่วนโค้งแบบไร้หน่วย $\hat{w}, \hat{T}, \hat{V}$ และ \hat{M} คือค่าไร้หน่วยของน้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ แรงอัดตามแนวแกน แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามลำดับ จากความสัมพันธ์ของสมการที่ (3ก-ฉ) ทำให้สามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหาที่ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูปของระบบสมการไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} = \sin \theta \quad (4ก)$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} = \cos \theta \quad (4ข)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\hat{M} \quad (4ค)$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = -\hat{V} \frac{d\theta}{ds} + \hat{w} \sin\theta \quad (4ง)$$

$$\frac{d\hat{V}}{ds} = \hat{T} \frac{d\theta}{ds} - \hat{w} \cos\theta \quad (4จ)$$

$$\frac{d\hat{M}}{ds} = \hat{V} \quad (4ฉ)$$

2.2 การหาค่าตอบเชิงตัวเลข

ระบบสมการที่ (4) จัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ซึ่งในการศึกษานี้ได้ใช้วิธียิงเป้า (SM) ในการวิเคราะห์หาค่าตอบเชิงตัวเลข วิธียิงเป้าเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมในการหาค่าตอบของระบบสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับที่ 1 ในกรณีที่ไม่มีทราบค่าเริ่มต้น ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นเหล่านั้นและกระบวนการยิงเป้าจะคำนวณหาค่าเริ่มต้นที่ถูกต้องออกมาโดยงานวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนไขของจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของคานาดังนี้ ที่จุดรองรับด้านซ้ายของคานา (จุด A) กำหนดให้อยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 0$ และ $\hat{y} = 0$ ขณะที่พิกัดตามแนวระดับของจุดรองรับด้านขวา (จุด B) คือ $\hat{y} = 0$ เนื่องจากจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคานาเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นโมเมนต์ดัด (\hat{M}) ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานาเท่ากับศูนย์ โดยที่ค่ามุม (θ) แรงเฉือน (\hat{V}) และระยะพิกัดตามแนวราบ (\hat{x}) ที่จุดรองรับ B เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรไม่ทราบค่าเป็น θ_B, \hat{V}_B และ \hat{x}_B ตามลำดับ ดังนั้นในการกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างของคานาทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการไร้มิติดังต่อไปนี้

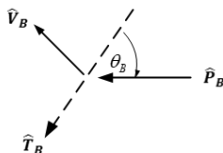
จุดรองรับ A ($\hat{s} = 0$) :

$$\hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_A, \hat{V} = \hat{V}_A, \hat{T} = \hat{T}_A \quad (5ก-ข)$$

จุดรองรับ B ($\hat{s} = 1$):

$$\hat{x} = \hat{x}_B, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_B, \hat{V} = \hat{V}_B, \hat{T} = \hat{T}_B \quad (6ก-ข)$$

เมื่อ \hat{T}_B คือแรงอัดตามแนวแกนที่จุด B ซึ่งสามารถหาได้จากการพิจารณาสมดุลของแรงที่จุด B ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 สมดุลของแรงที่จุดรองรับ B

จากรูปที่ 3 สมการสมดุลของแรงที่จุด B สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\hat{P}_B = \hat{T}_B \cos\theta_B + \hat{V}_B \sin\theta_B \quad (7)$$

ดังนั้น เมื่อจัดรูปสมการที่ (7) ค่า \hat{T}_B จะได้ดังสมการ

$$\hat{T}_B = \frac{\hat{P}_B - \hat{V}_B \sin\theta_B}{\cos\theta_B} \quad (8)$$

กระบวนการหาค่าตอบเชิงตัวเลขสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกให้กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ \hat{P}_B เป็นตัวแปรควบคุม กำหนดน้ำหนักของคานา \hat{w} ซึ่งเป็นค่าคงที่และค่าเงื่อนไขขอบเขต (\hat{y} และ \hat{M} ที่ $\hat{s} = 1$) จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งประกอบด้วย \hat{x}, θ และ \hat{V} ที่ $\hat{s} = 1$ ให้เท่ากับ \hat{x}_B, θ_B และ \hat{V}_B ตามลำดับ โดยอาศัยทฤษฎีของคานาที่อ่อนตัวน้อยแบบเป็นเชิงเส้นเพื่อใช้เป็นค่าเดาเริ่มต้น

จากนั้นอินทิเกรตสมการครอบคลุมปัญหาทั้ง 6 สมการ (สมการที่ (4)) ตามพิกัดส่วนโค้งของคานาจาก $\hat{s} = 1$ ถึง $\hat{s} = 0$ (จากจุดรองรับ B ไปยังจุดรองรับ A) ด้วยวิธี Cash-Karp Runge-Kutta อันดับที่ 5 โดยควบคุม Step Size ของการอินทิเกรต เพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ การศึกษานี้ใช้ Step Size เท่ากับ 0.01 จากนั้นใช้กระบวนการทำซ้ำ Newton-Raphson เพื่อทำการปรับแก้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ($\theta_B, \hat{V}_B, \hat{x}_B$) จนกระทั่งผลลัพธ์เข้าสู่และสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (8) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-12}

$$\min_{\theta_B, \hat{V}_B, \hat{x}_B} \Phi = |\hat{x}(0)| + |\hat{y}(0)| + |\hat{M}(0)| = 0 \quad (9)$$

ขั้นตอนสุดท้ายให้บวกส่วนเพิ่ม $\Delta\hat{P}_B$ เข้ากับค่าตัวแปรควบคุม \hat{P}_B และทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นทั้งหมดเพื่อสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง \hat{P}_B กับ θ_B และ \hat{P}_B กับ $\Delta (= 1 - \hat{x}_B)$

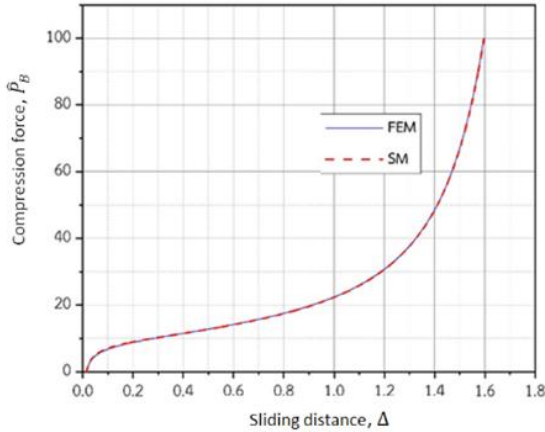
3. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

หัวข้อนี้นำเสนอการตรวจสอบความถูกต้องของผลคำตอบเชิงตัวเลข โดยที่ได้วิธีการยิงเป้า (SM) ดังแสดงในหัวข้อที่ 3.1 เมื่อมั่นใจว่าผลคำตอบที่ได้มีความถูกต้องแล้ว งานวิจัยนี้จึงได้ศึกษาเชิงลึกเพื่อวิเคราะห์ผลของตัวแปรต่างๆที่มีต่อพฤติกรรมของคานาอ่อนตัวและการโก่งเดาะของคานาที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้ ดังแสดงในหัวข้อที่ 3.2

3.1 ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

ในขั้นตอนนี้ได้ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และค่าคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธียิงเป้า (SM) โดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) จากงานวิจัยของธัญลักษณ์ วงษ์นุช และคณะ [13] โดยกำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) เท่ากับ 6 ความยาวช่วงคานา (\hat{L}) เท่ากับ 1 และแรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100

รูปที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) และระยะของการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) พบว่าทั้งวิธี SM และวิธี FEM ให้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกันมากเมื่อมีแรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) ตั้งแต่ 0-100 และพบว่าการเคลื่อนที่ตัวของจุดรองรับ B (Δ) มากขึ้นเมื่อมีแรงอัดมากระทำที่จุดรองรับเพิ่มมากขึ้น นอกจากนี้ ตารางที่ 1 ได้แสดงผลการเปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขจากวิธียิงเป้า (SM) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันมาก



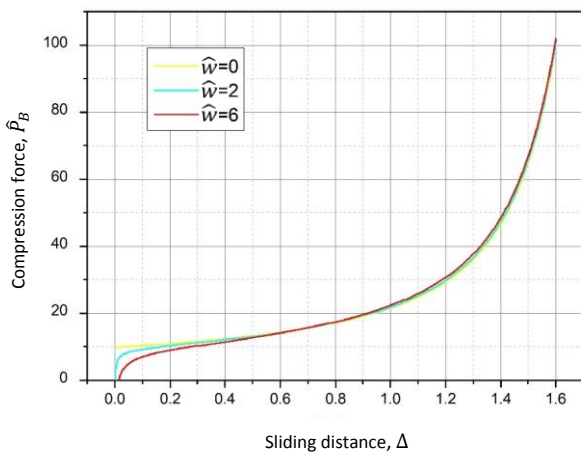
รูปที่ 4 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจตุรรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จตุรรองรับ (\hat{P}_B) ที่ได้จากรีจิงเป้า (SM) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM)

3.2 ตัวแปรที่มีผลต่อการแอ่นตัวของคาน

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์ตัวแปรต่างๆ ที่มีผลต่อการแอ่นตัวและเสถียรภาพของคานที่มีจตุรรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงอัดที่ปลายคาน โดยกำหนดน้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) เท่ากับ 0, 2 และ 6 โดยที่แรงอัดที่จตุรรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 0-100

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากรีจิงเป้า SM และวิธี FEM[13] เมื่อน้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) เท่ากับ 6

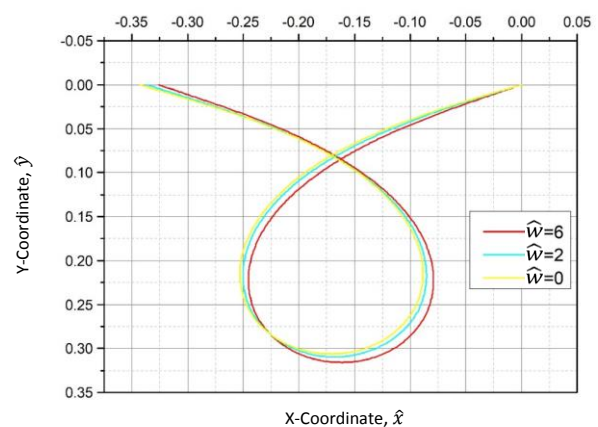
\hat{P}_B	$\theta_A(-\theta_B)$		\hat{y}_{max}		Δ		\hat{M}_{max}		\hat{V}_{max}		\hat{T}_{max}	
	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM
0	0.244131	0.244131	0.075877	0.075877	0.014445	0.014444	0.734682	0.734678	2.909593	2.911040	-0.724778	-0.725139
10	1.085405	1.085402	0.304852	0.304854	0.277224	0.277223	3.510014	3.509658	10.273837	10.244527	1.956620	2.012077
20	2.138747	2.138950	0.401146	0.401161	0.914898	0.914981	7.863321	7.859975	20.751799	19.887399	-13.580980	-13.287709
30	2.544136	2.546110	0.360806	0.360798	1.187361	1.187470	10.437445	10.425079	30.986281	29.766053	-26.749786	-26.492331
40	2.746523	2.744961	0.321174	0.321043	1.325700	1.326078	12.368899	12.344992	41.093491	39.953670	-38.280095	-38.088943
50	2.863648	2.861484	0.290077	0.289927	1.410305	1.410658	13.987787	13.944647	55.063368	48.900778	-49.063461	-48.924334
60	2.937487	2.933427	0.265773	0.265550	1.468485	1.468866	15.419263	15.350776	69.252177	58.935195	-59.484117	-59.393875
70	2.986755	2.981718	0.246362	0.246040	1.511666	1.512067	16.723476	16.619289	83.473304	69.580656	-69.717894	-69.657077
80	3.021007	3.014852	0.230490	0.229902	1.545429	1.545881	17.934078	17.776533	97.587876	79.937991	-79.850981	-79.819809
90	3.045588	3.036534	0.217241	0.215575	1.572822	1.573328	19.071985	18.783724	111.492045	89.947821	-89.927945	-89.916115
100	3.063684	3.050210	0.205984	0.201084	1.595665	1.596199	20.151224	19.495713	125.108246	99.222200	-99.972798	-99.990492



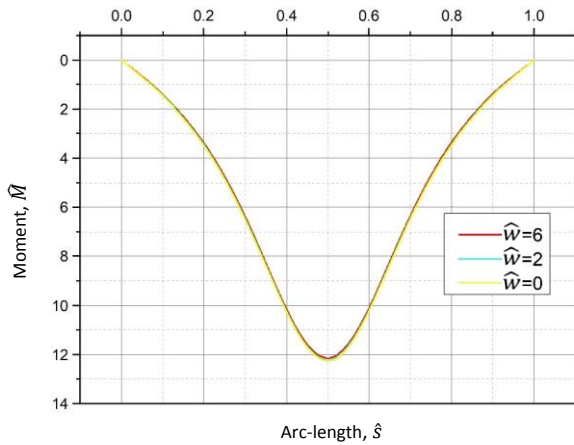
รูปที่ 5 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจตุรรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จตุรรองรับ (\hat{P}_B) เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6

รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่จตุรรองรับ \hat{P}_B และการเคลื่อนที่ตัวของจตุรรองรับ B (Δ) เมื่อ \hat{w} มีค่าต่างกัน ซึ่งพบว่ากราฟตัดกันเมื่อการเคลื่อนที่ของจตุรรองรับ B (Δ) เท่ากับ 0.7 หรือที่แรงอัด \hat{P}_B เท่ากับ 16 โดยสามารถแบ่งพฤติกรรมได้เป็น 2 ช่วง คือเมื่อ \hat{P}_B มีค่าตั้งแต่ 0-16 จะพบว่าถ้าน้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) มีค่าน้อยๆ คานจะเกิดการเสถียรน้อยกว่า ในทางกลับกันถ้าแรงอัด \hat{P}_B มีค่ามากกว่า 16 พบว่ากรณีที่น้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) น้อยๆ คานจะเกิดการเสถียรมากกว่ากรณี \hat{w} มีค่ามาก อย่างไรก็ตามการที่ $\hat{w} = 0$ เปรียบเสมือนปัญหาของเสาที่รับแรงตามแนวแกนเพียงอย่างเดียว ดังนั้นพฤติกรรมที่

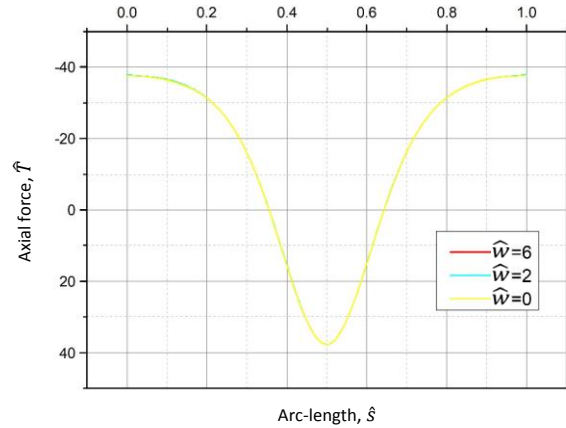
เกิดขึ้นจะสะท้อนกับพฤติกรรมการโก่งคดของเสา กล่าวคือเมื่อแรงอัดน้อยกว่าแรงอัดวิกฤติ เสาจะไม่เกิดการเสถียร แต่เมื่อใดก็ตามที่แรงอัดมากกว่าแรงอัดวิกฤติ เสาจะเกิดการโก่งคดและเสถียร ทำให้จตุรรองรับเริ่มเกิดการเคลื่อนที่



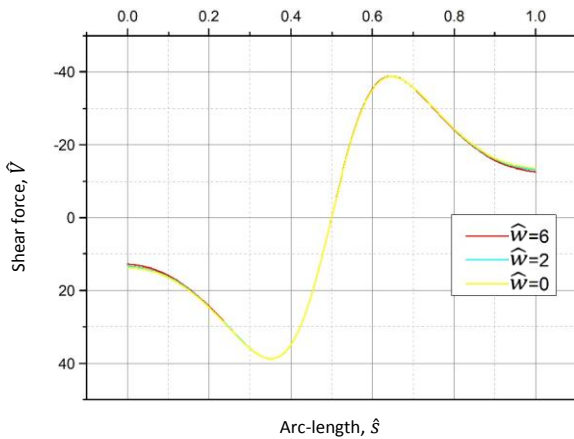
รูปที่ 6 เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานภายใต้แรงอัดที่จตุรรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 40 เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6



รูปที่ 7 เปรียบเทียบการกระจายตัวของโมเมนต์ (\hat{M}) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 40 เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6



รูปที่ 9 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงตามแนวแกน (\hat{T}) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 40 เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6



รูปที่ 8 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงเฉือน (\hat{V}) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 40 เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6

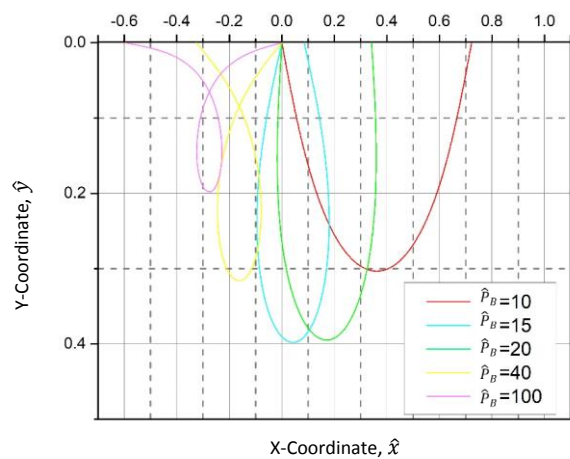
ตารางที่ 2 ผลค่าตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 40 เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6

\hat{P}_B	\hat{w}	$\theta_A(-\theta_B)$	\hat{y}_{max}	Δ	\hat{M}_{max}	\hat{V}_{max}	\hat{T}_{max}
40	2	2.795	0.311	1.343	12.464	-0.302	40.032
	4	2.778	0.315	1.337	12.424	-0.324	40.032
	6	2.745	0.321	1.326	12.345	-0.388	40.033

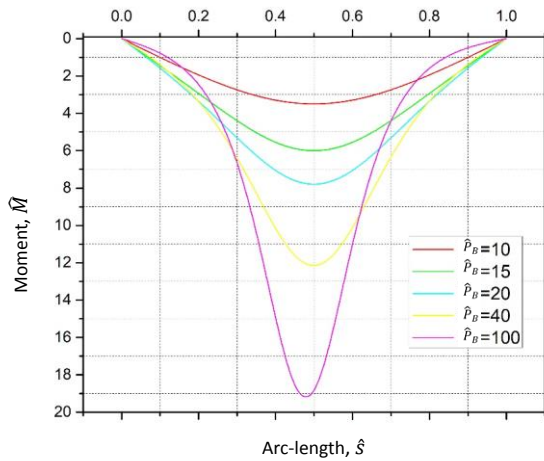
นอกจากนั้นผลค่าตอบเชิงตัวเลขที่เปรียบเทียบผลของ \hat{w} เท่ากับ 0, 2 และ 6 ภายใต้ \hat{P}_B เท่ากับ 40 ได้แสดงในตารางที่ 2 ได้แก่ ค่ามุมที่จุดรองรับ $\theta_A(-\theta_B)$ ระยะเคลื่อนที่ของจุดรองรับ (Δ) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด (\hat{M}_{max}) ค่าแรงเฉือนสูงสุด (\hat{V}_{max}) ค่าระยะการแอ่นสูงสุด (\hat{y}_{max}) และค่าแรงอัดในแนวแกนสูงสุด (\hat{T}_{max})

นอกจากนั้น หัวข้อนี้ได้นำเสนอรูปการแอ่นตัวของคานเมื่อกำหนดค่า \hat{P}_B ต่างกันซึ่งได้กำหนดเท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100 แต่กำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) คงที่เท่ากับ 6 ดังแสดงในรูปที่ 10

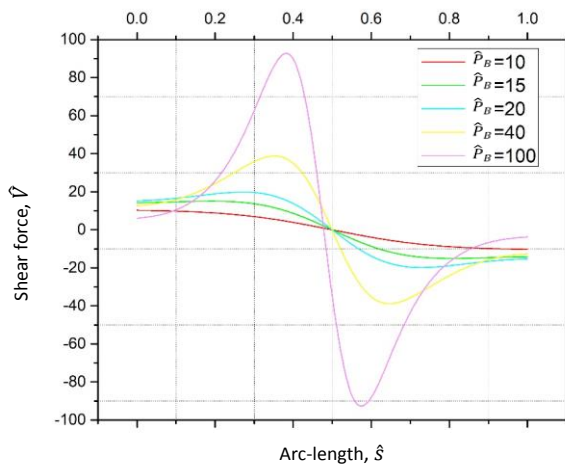
จากรูปร่างการแอ่นตัวของคานดังแสดงในรูปที่ 6 เมื่อ \hat{P}_B คงที่เท่ากับ 40 และน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) เท่ากับ 0, 2 และ 6 พบว่าเมื่อน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) น้อยๆจะทำให้การเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) มากกว่ากรณีที่มีน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ มีค่ามากกว่า จากรูปร่างการแอ่นตัวของคานในรูปที่ 6 พบว่าแรงภายในคานที่ตำแหน่งต่างๆ ได้แก่ โมเมนต์ แรงเฉือนและแรงตามแนวแกนมีค่าใกล้เคียงกันมากถึงแม้ว่าน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) จะต่างกันดังแสดงในรูปที่ 7, 8 และ 9 ตามลำดับ โดยค่าโมเมนต์สูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางคานโดยมีค่าความต่างเล็กน้อยบริเวณนี้ ค่าแรงเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่ระยะ s เท่ากับ 0.35 และ 0.65 และแรงตามแนวแกนเป็นแรงอัดมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางคาน แต่ทว่าเกิดแรงดึงสูงสุดที่จุดรองรับทั้ง 2 ข้าง



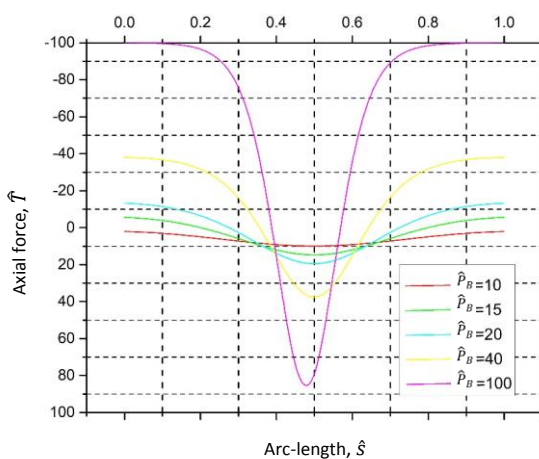
รูปที่ 10 เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100



รูปที่ 11 เปรียบเทียบการกระจายตัวของโมเมนต์ (\hat{M}) ตลอดความยาวคาน ภายใต้อาณัติที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100



รูปที่ 12 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงเฉือน (\hat{V}) ตลอดความยาวคาน ภายใต้อาณัติที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100



รูปที่ 13 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงตามแนวแกน (\hat{T}) ตลอดความยาวคาน ภายใต้อาณัติที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100

จากรูปที่ 10 พบว่าเมื่อแรงอัด \hat{P}_B เพิ่มขึ้นจะทำให้เคลื่อนที่ของจุดรองรับ (Δ) มากขึ้น ส่วนค่าการแอ่นตัวจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงค่าหนึ่งหลัง

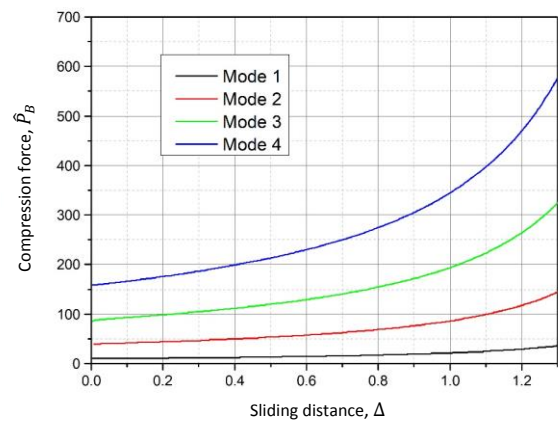
จากนั้นก็ลดลง แต่ถ้าแรงอัดที่จุดรองรับ \hat{P}_B มากขึ้นเรื่อยๆ หรือ \hat{P}_B ประมาณเท่ากับ 40 ขึ้นไป จุดรองรับด้านขวาจะเคลื่อนที่ผ่านเลยจุดรองรับด้านซ้าย ซึ่งคานจะเกิดการสูญเสียเสถียรภาพ นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อแรงอัด \hat{P}_B มีค่ามากขึ้นจะส่งผลให้เกิดแรงภายในมากขึ้นด้วยดังแสดงในรูปที่ 11-13 โดยพบว่าที่ \hat{P}_B เท่ากับ 100 จะเกิดโมเมนต์สูงสุดที่กึ่งกลางคาน เกิดแรงเฉือนสูงสุดที่ระยะ s เท่ากับ 0.39 และ 0.59 (รูปที่ 12) และเกิดแรงตามแนวแกนสูงสุดเป็นแรงอัดที่บริเวณกึ่งกลางคาน และเกิดแรงดึงสูงสุดที่บริเวณจุดรองรับ (รูปที่ 13) นอกจากนี้ ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัด \hat{P}_B ได้นำเสนอในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100 เมื่อน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{W}) คงที่เท่ากับ 6

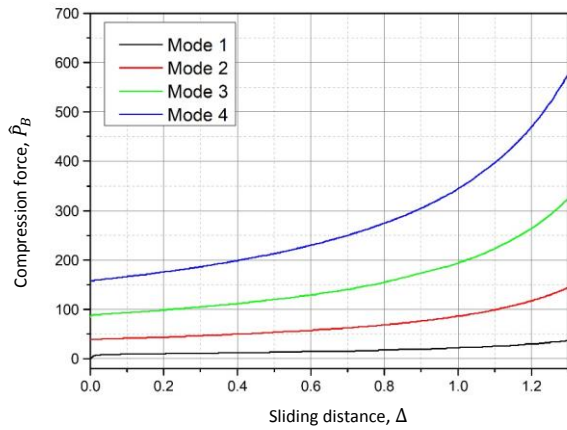
\hat{P}_B	$\theta_A(-\theta_B)$	\hat{y}_{max}	Δ	\hat{M}_{max}	\hat{V}_{max}	\hat{T}_{max}
10	1.085	0.305	0.277	3.510	0.000067	10.000
15	1.749	0.397	0.658	6.039	0.0003	15.001
20	2.139	0.401	0.915	7.860	-0.0018	20.005
60	2.933	0.266	-1.469	15.351	-2.8038	60.012
100	3.050	0.201	-1.596	19.496	-41.5881	91.133

3.3 การโก่งคานของคานในโหมดอันดับสูง

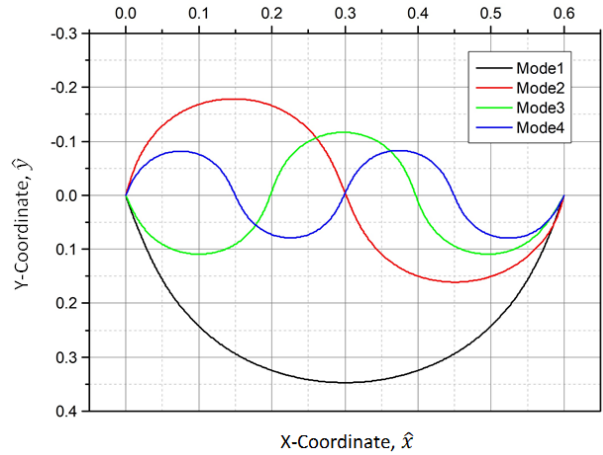
ในหัวข้อนี้จะเสนอการโก่งคานของคานในโหมดอันดับสูง ซึ่งได้แก่ โหมดที่ 1, 2, 3 และ 4 โดยพิจารณากำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{W}) เท่ากับ 0, 2 และ 6



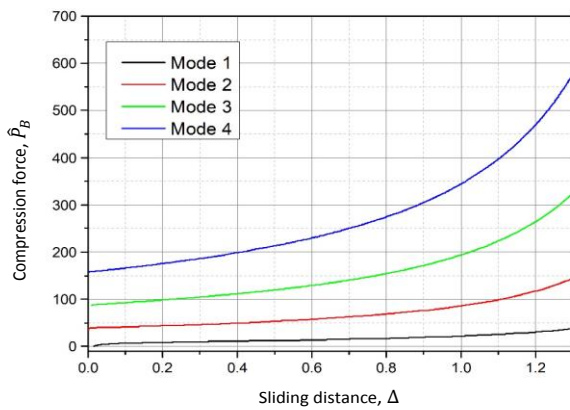
รูปที่ 14 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) ของโหมดการโก่งคานที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 0



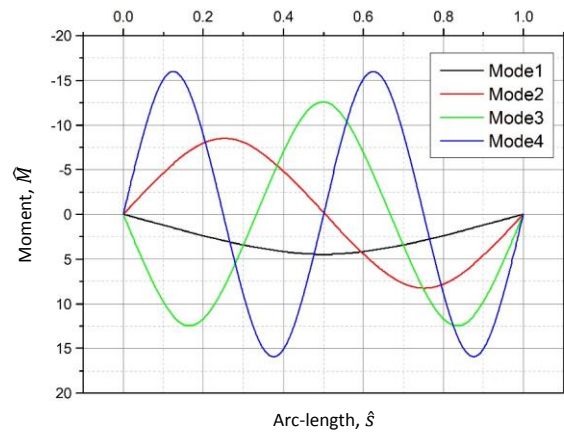
รูปที่ 15 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 2



รูปที่ 17 เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 6 และ Δ เท่ากับ 0.4

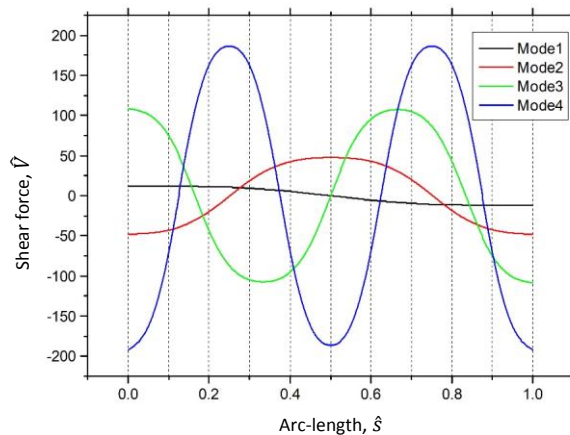


รูปที่ 16 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ (\hat{P}_B) ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 6

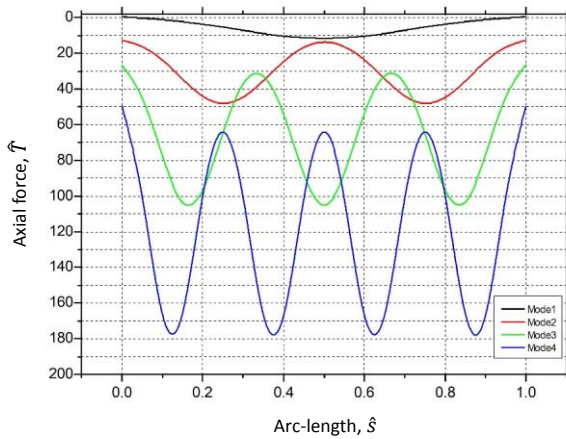


รูปที่ 18 เปรียบเทียบการกระจายตัวของโมเมนต์ (\hat{M}) ตลอดความยาวคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 6 และ Δ เท่ากับ 0.4

รูปที่ 14-16 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัด (\hat{P}_B) ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 0, 2 และ 6 ตามลำดับ พบว่ายิ่งโหมดการโก่งเดาะสูงขึ้น ต้องใช้แรงอัดที่จุดรองรับ \hat{P}_B มากขึ้นเพื่อทำให้จุดรองรับเคลื่อนที่ (Δ) โดยจะเห็นได้ว่าผลจากน้ำหนักของคานจะมีผลน้อยมาก โดยกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย



รูปที่ 19 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงเฉือน (\hat{V}) ตลอดความยาวคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{W} เท่ากับ 6 และ Δ เท่ากับ 0.4



รูปที่ 20 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงตามแนวแกน (T) ตลอดความยาวคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ \hat{w} เท่ากับ 6 และ Δ เท่ากับ 0.4

เพื่อเปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานจากโหมดการโก่งเดาะต่างๆ (โหมด 1-4) โดยพิจารณากรณีที่น้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ (\hat{w}) เท่ากับ 6 และค่าการเคลื่อนที่ของจุดรองรับเท่ากับ 0.4 (Δ) ดังแสดงในรูปที่ 17 พบว่าโหมดการโก่งเดาะของคานขึ้นอยู่กับจำนวนจุดดัดกลับ (Inflection point) โดยจำนวนจุดดัดกลับจะเท่ากับ $n - 1$ เมื่อ n คือลำดับโหมด อย่างไรก็ตามเมื่อโหมดอันดับสูงขึ้น ค่าการแอ่นตัวสูงสุดของคานจะลดลง รูปที่ 18 พบว่าที่โหมดอันดับที่สูงขึ้นทำให้เกิดแรงภายในมากขึ้น ซึ่งค่าโมเมนต์สูงสุดจะเกิดที่กึ่งกลางของแต่ละ loop หรือตรงตำแหน่งจุดดัดกลับซึ่งมีทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่ที่จุดรองรับจะมีค่าโมเมนต์เป็นศูนย์ จากรูปที่ 19 พบว่าที่โหมดต่างๆ จะมีค่าแรงเฉือนสูงสุดเกิดที่จุดรองรับและที่กึ่งกลางของแต่ละ loop และจากรูปที่ 20 พบว่าที่โหมดอันดับที่สูงขึ้น แรงตามแนวแกนจะเพิ่มขึ้นและมีค่าสูงสุดที่กึ่งกลางคานและกึ่งกลางของแต่ละ loop

4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงกระทำด้านข้างและแรงอัดที่ปลายคาน แบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานสร้างขึ้นโดยอาศัยหลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์ โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น จากนั้นหาค่าตอบเชิงตัวเลขด้วยวิธีฮิวริสติก (SM) และตรวจสอบความถูกต้องโดยเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ผลการศึกษาพบว่าน้ำหนักของคานและแรงอัดที่จุดรองรับทำให้จุดรองรับเลื่อนสไลด์และคานเกิดการแอ่นตัวตลอดจนทำให้ เสถียรภาพของคานลดลง โมเมนต์ดัดมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางคาน และมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดรองรับ แรงเฉือนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณจุดรองรับทั้งสองข้างของคาน แรงอัดในแนวแกนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางคาน นอกจากนี้ยังพบว่าแรงอัดที่จุดรองรับต้องมากขึ้นเพื่อให้เกิดการโก่งเดาะในโหมดอันดับสูง โหมดการโก่งเดาะของคานขึ้นอยู่กับจำนวนจุดดัดกลับ โดยจำนวนจุดดัดกลับจะเท่ากับ $n - 1$ เมื่อ n คือลำดับโหมด เมื่อโหมดอันดับสูงขึ้นทำให้แรงภายในสูงขึ้นแต่ค่าการแอ่นตัวสูงสุดของคานจะลดลง ผลการวิเคราะห์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถนำมาเป็นแนวทางในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างคาน-เสา และโครงสร้างอื่นๆที่มีความละเอียดสูง ทั้งนี้ แบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถนำไปต่อ

ยอดเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับแบบติดตามการเสียรูป

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความอนุเคราะห์สถานที่และสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] สุรพันธ์ บุญเจริญ (2536). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเคลื่อนอย่างอิสระโดยใช้วิธีอีลิปติกอินทิกรัลในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.
- [2] ธนภัทร วัฒนาบุญศิริ อินทัช ต่านปาน ธนนิพนธ์ เหมือนเหลา และการันต์ คล้ายน้ำ (2563). แรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้. การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 25, ชลบุรี, 15-17 กรกฎาคม 2563, หน้า 1-7.
- [3] สุนิสา รอดสังวาล (2542). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.
- [4] ณัฐพัชร์ จันทกรุลมณี (2562) ผลกระทบของจุดรองรับแบบด้านทานการหมุนแบบยึดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติคาคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้แบบจำลองของสปริงด้านทานการหมุน. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.
- [5] Chucheeprakul, S Buncharoen, S. and Huang, T. (1995). Elastica of simple variable-arc-length beam subjected to end moment. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(7), pp.767-772
- [6] ศรีณย์ ชุมกัลดี (2560). ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติคาคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.
- [7] Areiza-Hurtado, M. and Aristizábal-Ochoa, J.D. (2020). Large-deflection analysis of prismatic and tapered beam-column using the Differential Transform Method. *Structure*, 28, pp. 923-932.
- [8] McHugh, K. and Dowell, E. (2018). Nonlinear Responses of Inextensible Cantilever and Free-Free Beams Undergoing Large Deflections. *Journal of Applied Mechanics*, 85(5): 051008.
- [9] Jeong, S. and Yoo, H.H. (2017). Flexibility modeling of a beam undergoing large deflection using the assumed mode method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 133, pp.611-618.
- [10] Masjedi, P.K. and Weaver, P.M. (2022). Analytical solution for arbitrary large deflection of geometrically exact beams using the homotopy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*, 103, pp.516-542.

- [11] Patel, B.N. and Srinivasan, S.M. (2017). A simplified moment-curvature based approach for large deflection analysis of micro-beams using the consistent couple stress theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 66, pp.45-54.
- [12] Giraldo-Londono, O., Monsalve-Giraldo, J.S., and Ariszabal-Ochoa, J.D. (2015). Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77, pp.85-95.
- [13] ฉัญญลักษณ์ วงษ์นุช, อภิรักษ์ เงินรี และสหัสวัต เลิศสำราญ (2565). วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเลื่อนสไลด์ได้อิสระในแนวราบ. วิทยานิพนธ์ปริญญาตรี, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.