การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้โดยใช้วิธียิงเป้า
Large Deflection Analysis of Beam with Movable Support using Shooting Method

วันวิสา รักษาสุข[1] อภิญญา ศิริศรีรัตนา[2] ปฏิญญา แก้วคูนอก[3] สุธาวาส จันทร์เรือง[4] และ การันต์ คล้ายฉ่ำ[5,*]

[1,2,3,5] ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ.นครปฐม
[4] ภาควิชาวิทยาศาสตร์ประยุกต์และสังคม วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กทม.
**Corresponding author; E-mail address: karun.kl@ku.ac.th*

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบ ซึ่งคานรับน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน และมีแรงอัดที่ปลายคานกระทำตามแนวราบ สมการครอบคลุมปัญหาของคานสร้างจากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างคานและจากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ผลคำตอบเชิงตัวเลขหาได้โดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้าซึ่งตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลการศึกษาเชิงตัวเลขมุ่งเน้นศึกษาผลกระทบของน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอและค่าแรงอัดที่จุดรองรับต่อพฤติกรรมการโก่งเดาะของคาน ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า น้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอและแรงอัดที่ปลายคาน ส่งผลทำให้จุดรองรับของคานเคลื่อนที่และคานสูญเสียเสถียรภาพ

คำสำคัญ : การแอ่นตัวมาก, พฤติกรรมการโก่งเดาะ, ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, ระเบียบวิธียิงเป้า

Abstract

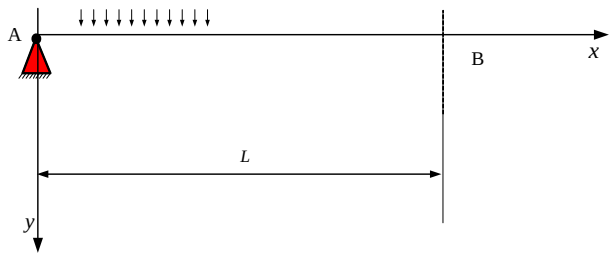
แรงอัดที่ปลายคานและรวมผลกระทบจากน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ

ดังนั้นงานวิจัยนี้ ได้ใช้หลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์สำหรับสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานช่วงเดียวที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงกระทำด้านข้างและแรงอัดที่ปลาย ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น และหาคำตอบของสมการด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยวิธีการยิงเป้า (Shooting method: SM) จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้กับงานวิจัยของธัญญลักษณ์ วงษ์นุช และคณะ [13] ซึ่งวิเคราะห์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method: FEM) ซึ่งเป็นแบบจำลองในระบบพิกัดอินทรินซิก ที่พัฒนาขึ้นโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน โดยพิจารณาพลังงานความเครียดเนื่องจากการดัดของคานและงานภายนอกเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอและแรงอัดที่ปลายคาน ในกระบวนการ FEM นี้ได้ใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ 3 ในการประมาณค่ามุมหมุนของคาน

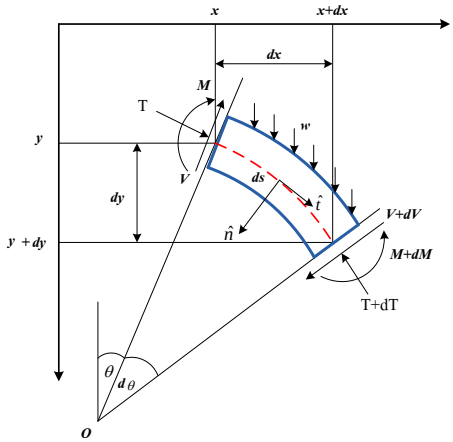
2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการหาคำตอบเชิงตัวเลข

2.1 *ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตและสมการสมดุลของคาน*

รูปที่ 1 แสดงลักษณะทางกายภาพของโครงสร้างคานที่มีจุดรองรับทั้ง 2 ด้านอยู่ในระดับเดียวกัน ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน และแรงอัดที่จุดรองรับ B ซึ่งเป็นจุดรองรับที่เคลื่อนที่ได้อิสระตามแนวราบ และทำให้คานเกิดการแอ่นตัว ความยาวคานมีค่าคงที่เท่ากับ ภายใต้แรงกระทำดังกล่าว ทำให้จุดรองรับด้านขวาของคานเคลื่อนที่ไปเท่ากับ และคานแอ่นตัวจากตำแหน่งก่อนการเสียรูปไปยังสภาวะสมดุลสถิตย์ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ลักษณะการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้



รูปที่ 2 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน

รูปที่ 2 แสดงผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีความยาวส่วนโค้งน้อยๆ จากรูปนี้ ระบบสมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบโดยอ้างอิงทฤษฎีอิลาสติกคาสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

— (1ก)

— (1ข)

— — (1ค)

โดยตัวแปร คือมุมระหว่างแนวราบกับแนวเส้นสัมผัสของคาน คือพิกัดตามความยาวส่วนโค้งของคาน คือพิกัดตามระยะในแนวราบของคาน ตัวแปร และ คือโมดูลัสยืดหยุ่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน ตามลำดับ และ คือโมเมนต์ดัด

จากรูปที่ 2 สมการสมดุลของคานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยสมการสมดุลของแรงตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสียรูปของคานดังสมการที่ (2ก) และ (2ข) ตามลำดับ ขณะที่สมการที่ (2ค) คือสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O

— — (2ก)

— — (2ข)

— (2ค)

ตัวแปร และ คือแรงอัดตามแนวแกน และแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่าง ๆของคาน ตามลำดับ

เนื่องจากสมการที่ (1) และ (2) เป็นระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงเหมาะที่จะหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจำเป็นต้องจัดให้อยู่ในรูปของสมการไร้หน่วย โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการต่อไปนี้

– – – (3ก-ง)

— — — — (3จ-ฌ)

ตัวแปร คือค่าพิกัดตามความยาวส่วนโค้งแบบไร้หน่วย และ คือค่าไร้หน่วยของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ แรงอัดตามแนวแกน แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามลำดับ จากความสัมพันธ์ของสมการที่ (3ก-ฌ) ทำให้สามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหาที่ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูปของระบบสมการไร้หน่วยได้ดังนี้

— (4ก)

— (4ข)

— (4ค)

— — (4ง)

— — (4จ)

— (4ฉ)

2.2 การหาคำตอบเชิงตัวเลข

ระบบสมการที่ (4) จัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ซึ่งในการศึกษานี้ได้ใช้วิธียิงเป้า (SM) ในการวิเคราะห์หาคำตอบเชิงตัวเลข วิธียิงเป้าเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมในการหาคำตอบของระบบสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับที่ 1 ในกรณีที่ไม่ทราบค่าเริ่มต้น ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นเหล่านั้นและกระบวนการยิงเป้าจะคำนวณหาค่าเริ่มต้นที่ถูกต้องออกมา โดยงานวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนไขของจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของคานดังนี้ ที่จุดรองรับด้านซ้ายของคาน (จุด A) กำหนดให้อยู่ที่พิกัด และ ขณะที่พิกัดตามแนวระดับของจุดรองรับด้านขวา (จุด B) คือ เนื่องจากจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคานเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นโมเมนต์ดัด ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานเท่ากับศูนย์ โดยที่ค่ามุม แรงเฉือน และระยะพิกัดตามแนวราบ ที่จุดรองรับ B เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรไม่ทราบค่านี้เป็น และ ตามลำดับ ดังนั้นในการกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างของคานทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการไร้หน่วยดังต่อไปนี้

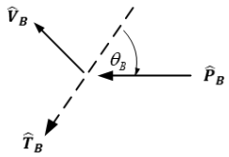
จุดรองรับ A :

(5ก-ช)

จุดรองรับ B :

(6ก-ช)

เมื่อ คือแรงอัดตามแนวแกนที่จุด B ซึ่งสามารถหาได้จากการพิจารณาสมดุลของแรงที่จุด B ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 สมดุลของแรงที่จุดรองรับ B

จากรูปที่ 3 สมการสมดุลของแรงที่จุด B สามารถเขียนได้ดังนี้

(7)

ดังนั้น เมื่อจัดรูปสมการที่ (7) ค่า จะได้ดังสมการ

———— (8)

กระบวนการหาคำตอบเชิงตัวเลขสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกให้กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ เป็นตัวแปรควบคุม กำหนดน้ำหนักของคาน ซึ่งเป็นค่าคงที่และค่าเงื่อนไขขอบเขต และ ที่ จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งประกอบด้วย และ ที่ ให้เท่ากับ และ ตามลำดับ โดยอาศัยทฤษฎีของคานที่แอ่นตัวน้อยแบบเป็นเชิงเส้นเพื่อใช้เป็นค่าเดาเริ่มต้น

จากนั้นอินทิเกรตสมการครอบคลุมปัญหาทั้ง 6 สมการ (สมการที่ (4)) ตามพิกัดส่วนโค้งของคานจาก ถึง (จากจุดรองรับ B ไปยังจุดรองรับ A) ด้วยวิธี Cash-Karp Runge-Kutta อันดับที่ 5 โดยควบคุม Step Size ของการอินทิเกรต เพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ การศึกษานี้ใช้ Step Size เท่ากับ 0.01 จากนั้นใช้กระบวนการทำซ้ำ Newton-Raphson เพื่อทำการปรับแก้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้าและสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (8) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ (Tolerance) เท่ากับ

(9)

ขั้นตอนสุดท้ายให้บวกส่วนเพิ่ม เข้ากับค่าตัวแปรควบคุม และทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นทั้งหมดเพื่อสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง กับ และ กับ

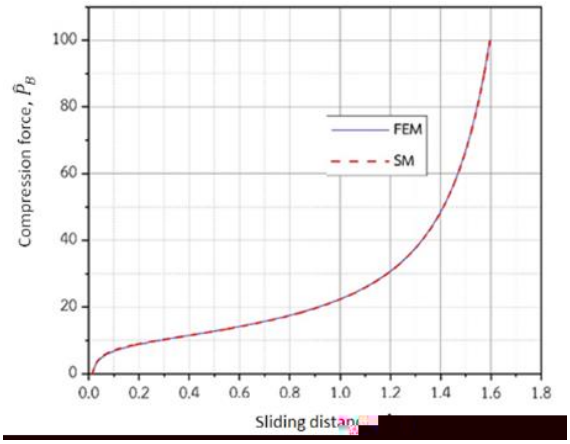
3. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

หัวข้อนี้นำเสนอการตรวจสอบความถูกต้องของผลคำตอบเชิงตัวเลขโดยที่ได้วิธีการยิงเป้า (SM) ดังแสดงในหัวข้อที่ 3.1 เมื่อมั่นใจว่าผลคำตอบที่ได้มีความถูกต้องแล้ว งานวิจัยนี้จึงได้ศึกษาเชิงลึกเพื่อวิเคราะห์ผลของตัวแปรต่างๆที่มีต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากและการโก่งเดาะของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้ ดังแสดงในหัวข้อที่ 3.2

3.1 ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

ในขั้นตอนนี้ได้ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และค่าคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธียิงเป้า (SM) โดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) จากงานวิจัยของธัญญลักษณ์ วงษ์นุช และคณะ [13] โดยกำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) เท่ากับ 6 ความยาวช่วงคาน ( ) เท่ากับ 1 และแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100

รูปที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) และระยะการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) พบว่าทั้งวิธี SM และวิธี FEM ให้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกันมากเมื่อมีแรงอัดที่จุดรองรับ (ตั้งแต่ 0-100 และพบว่าการเคลื่อนตัวที่ของจุดรองรับ B ( ) มากขึ้นเมื่อมีแรงอัดมากระทำที่จุดรองรับเพิ่มมากขึ้น นอกจากนั้น ตารางที่ 1 ได้แสดงการเปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขจากวิธียิงเป้า (SM) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันมาก



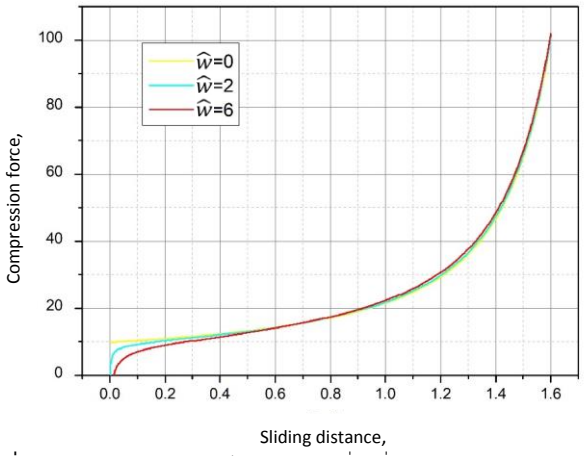
รูปที่ 4 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) ที่ได้จากวิธียิงเป้า (SM) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM)

3.2 ตัวแปรที่มีผลต่อการแอ่นตัวของคาน

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์ตัวแปรต่างๆ ที่มีผลต่อการแอ่นตัวและเสถียรภาพของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงอัดที่ปลายคาน โดยกำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) เท่ากับ 0, 2 และ 6 โดยที่แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 0-100

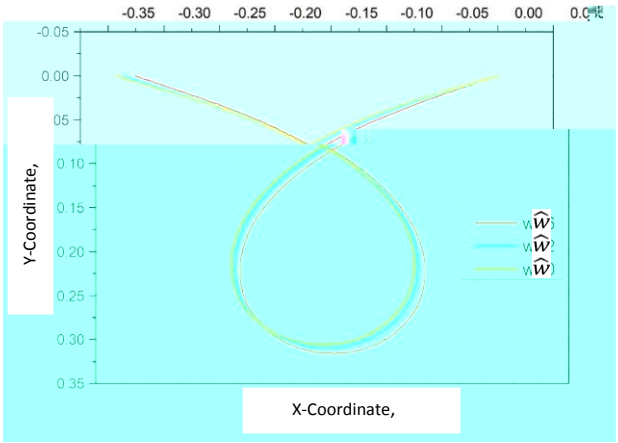
ตารางที่ 1 เปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธี SM และวิธี FEM[13] เมื่อน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) เท่ากับ 6

	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM
0	0.244131	0.244131	0.075877	0.075877	0.014445	0.014444	0.734682	0.734678	2.909593	2.911040	-0.724778	-0.725139
10	1.085405	1.085402	0.304852	0.304854	0.277224	0.277223	3.510014	3.509658	10.273837	10.244527	1.956620	2.012077
20	2.138747	2.138950	0.401146	0.401161	0.914898	0.914981	7.863321	7.859975	20.751799	19.887399	-13.580980	-13.287709
30	2.544136	2.546110	0.360806	0.360798	1.187361	1.187470	10.437445	10.425079	30.986281	29.766053	-26.749786	-26.492331
40	2.746523	2.744961	0.321174	0.321043	1.325700	1.326078	12.368899	12.344992	41.093491	39.953670	-38.280095	-38.088943
50	2.863648	2.861484	0.290077	0.289927	1.410305	1.410658	13.987787	13.944647	55.063368	48.900778	-49.063461	-48.924334
60	2.937487	2.933427	0.265773	0.265550	1.468485	1.468866	15.419263	15.350776	69.252177	58.935195	-59.484117	-59.393875
70	2.986755	2.981718	0.246362	0.246040	1.511666	1.512067	16.723476	16.619289	83.473304	69.580656	-69.717894	-69.657077
80	3.021007	3.014852	0.230490	0.229902	1.545429	1.545881	17.934078	17.776533	97.587876	79.937991	-79.850981	-79.819809
90	3.045588	3.036534	0.217241	0.215575	1.572822	1.573328	19.071985	18.783724	111.492045	89.947821	-89.927945	-89.916115
100	3.063684	3.050210	0.205984	0.201084	1.595665	1.596199	20.151224	19.495713	125.108246	99.222200	-99.972798	-99.990492

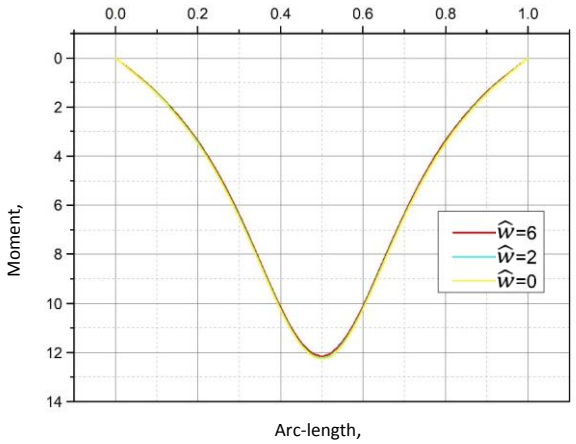


รูปที่ 5 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6

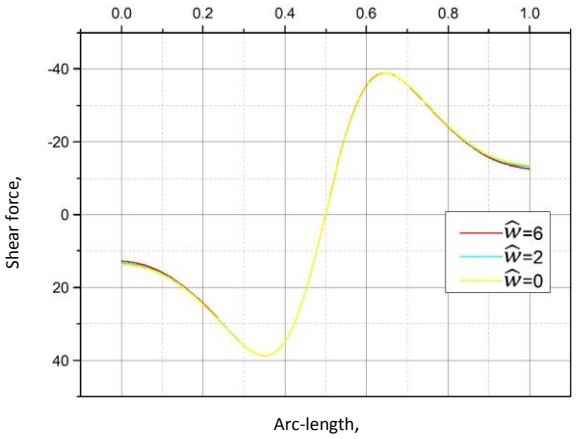
รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่จุดรองรับ และการเคลื่อนตัวที่ของจุดรองรับ B **( )** เมื่อ มีค่าต่างกัน ซึ่งพบว่ากราฟตัดกันเมื่อการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) เท่ากับ 0.7 หรือที่แรงอัด เท่ากับ 16 โดยสามารถแบ่งพฤติกรรมได้เป็น 2 ช่วง คือเมื่อ มีค่าตั้งแต่ 0-16 จะพบว่าถ้าน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) มีค่าน้อยๆ คานจะเกิดการเสียรูปน้อยกว่า ในทางกลับกันถ้าแรงอัด มีค่ามากกว่า 16 พบว่ากรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) น้อยๆ คานจะเกิดการเสียรูปมากกว่ากรณีที่ มีค่ามาก อย่างไรก็ดีกรณีที่ เปรียบเสมือนปัญหาของเสาที่รับแรงตามแนวแกนเพียงอย่างเดียว ดังนั้นพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจะสะท้อนกับพฤติกรรมการโก่งเดาะของเสา กล่าวคือเมื่อแรงอัดน้อยกว่าแรงอัดวิกฤติ เสาจะไม่เกิดการเสียรูป แต่เมื่อใดก็ตามที่แรงอัดมากกว่าแรงอัดวิกฤติ เสาจะเกิดการโก่งเดาะและเสียรูป ทำให้จุดรองรับเริ่มเกิดการเคลื่อนที่



รูปที่ 6 เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 40 เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6

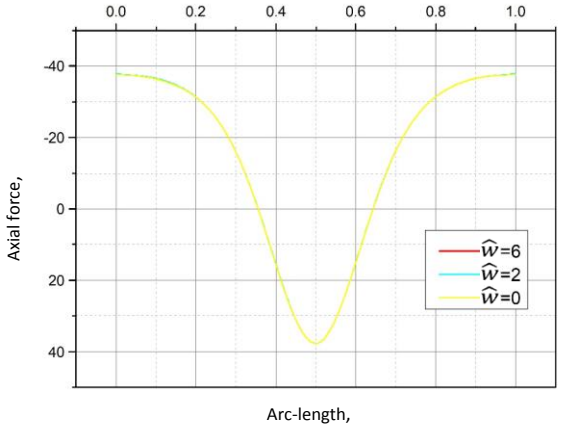


รูปที่ 7 เปรียบเทียบการกระจายตัวของโมเมนต์ ( ) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 40 เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6



รูปที่ 8 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงเฉือน ( ) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 40 เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6

จากรูปร่างการแอ่นตัวของคานดังแสดงในรูปที่ 6 เมื่อ คงที่เท่ากับ 40 และน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) เท่ากับ 0, 2 และ 6 พบว่าเมื่อน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) น้อยๆจะทำให้การเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) มากกว่ากรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ มีค่ามากกว่า จากรูปร่างการแอ่นตัวของคานในรูปที่ 6 พบว่าแรงภายคานที่ตำแหน่งต่างๆ ได้แก่โมเมนต์ แรงเฉือนและแรงตามแนวแกนมีค่าใกล้เคียงกันมากถึงแม้ว่าน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) จะต่างกันดังแสดงในรูปที่ 7, 8 และ 9 ตามลำดับ โดยค่าโมเมนต์สูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางคานโดยมีค่าความต่างกันเล็กน้อยบริเวณนี้ ค่าแรงเฉือนสูงสุดเกิดที่ระยะ เท่ากับ 0.35 และ 0.65 และแรงตามแนวแกนเป็นแรงอัดมีค่ามากสุดบริเวณกึ่งกลางคาน แต่ทว่าเกิดแรงดึงสูงสุดที่จุดรองรับทั้ง 2 ข้าง



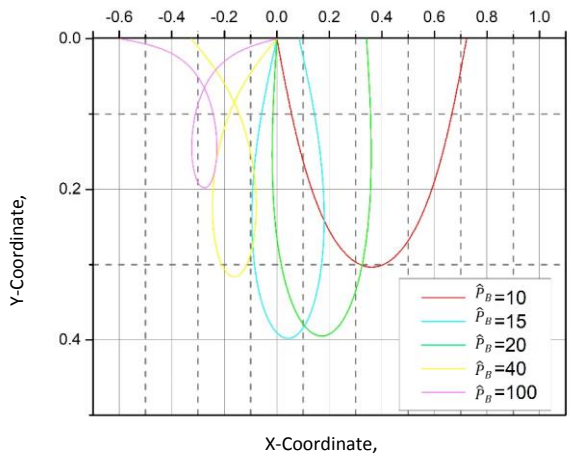
รูปที่ 9 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงตามแนวแกน ( ) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 40 เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6

ตารางที่ 2 ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 40 เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6

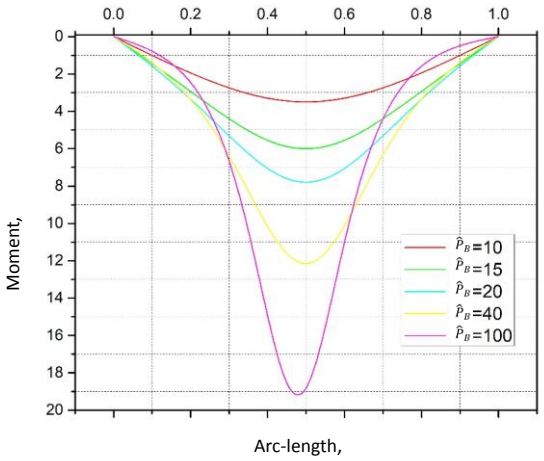
40	2	2.795	0.311	1.343	12.464	-0.302	40.032
	4	2.778	0.315	1.337	12.424	-0.324	40.032
	6	2.745	0.321	1.326	12.345	-0.388	40.033

นอกจากนั้นผลคำตอบเชิงตัวเลขที่เปรียบเทียบผลของ เท่ากับ 0, 2 และ 6 ภายใต้ เท่ากับ 40 ได้แสดงในตารางที่ 2 ได้แก่ ค่ามุมที่จุดรองรับ ระยะเคลื่อนที่ของจุดรองรับ ( ) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด ( ) ค่าแรงเฉือนสูงสุด ( ) ค่าระยะการแอ่นสูงสุด ( ) และค่าแรงอัดในแนวแกนสูงสุด ( )

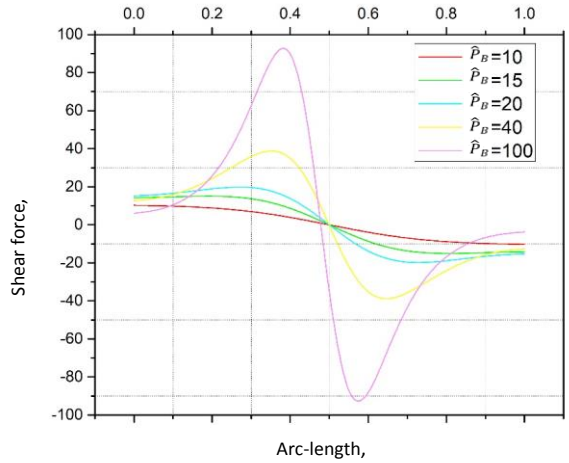
นอกจากนั้น หัวข้อนี้ได้นำเสนอรูปการแอ่นตัวของคานเมื่อกำหนดค่าต่างกันซึ่งได้กำหนดเท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100 แต่กำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) คงที่เท่ากับ 6 ดังแสดงในรูปที่ **10**



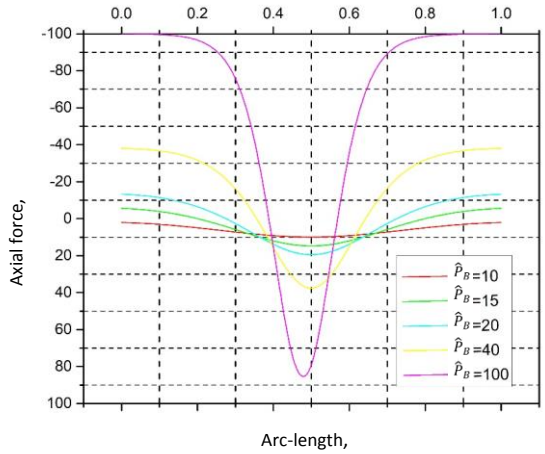
รูปที่ 10 เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100



รูปที่ 11 เปรียบเทียบการกระจายตัวของโมเมนต์ ( ) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100



รูปที่ 12 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงเฉือน ( ) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100



รูปที่ 13 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงตามแนวแกน ( ) ตลอดความยาวคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100

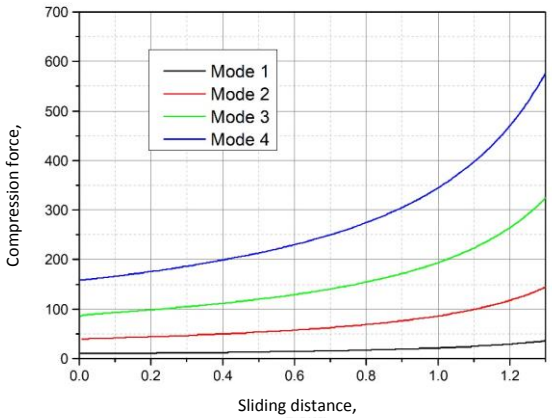
จากรูปที่ 10 พบว่าเมื่อแรงอัด เพิ่มขึ้นจะทำให้เคลื่อนที่ของจุดรองรับ ( ) มากขึ้น ส่วนค่าการแอ่นตัวจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงค่าหนึ่งหลังจากนั้นก็จะลดลง แต่ถ้าแรงอัดที่จุดรองรับ มากขึ้นเรื่อยๆหรือประมาณเท่ากับ 40 ขึ้นไป จุดรองรับด้านขวาจะเคลื่อนที่ผ่านเลยจุดรองรับด้านซ้าย ซึ่งคานจะเกิดการสูญเสียเสถียรภาพ นอกจากนั้นยังพบว่ามีแรงอัดมีค่ามากขึ้นจะส่งผลให้เกิดแรงภายในมากขึ้นด้วยดังแสดงในรูปที่ 11-13 โดยพบว่าที่ เท่ากับ 100 จะเกิดโมเมนต์สูงสุดที่กึ่งกลางคาน เกิดแรงเฉือนสูงสุดที่ระยะ เท่ากับ 0.39 และ 0.59 (รูปที่ 12) และเกิดแรงตามแนวแกนสูงสุดเป็นแรงอัดที่บริเวณกึ่งกลางคาน และเกิดแรงดึงสูงสุดที่บริเวณจุดรองรับ (รูปที่ 13) นอกจากนั้น ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัด ได้นำเสนอในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ( ) เท่ากับ 10, 15, 20, 60 และ 100 เมื่อน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) คงที่เท่ากับ 6

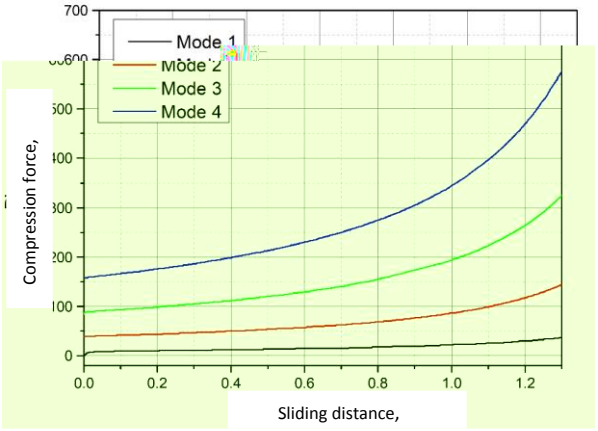
10	1.085	0.305	0.277	3.510	0.000067	10.000
15	1.749	0.397	0.658	6.039	0.0003	15.001
20	2.139	0.401	0.915	7.860	-0.0018	20.005
60	2.933	0.266	-1.469	15.351	-2.8038	60.012
100	3.050	0.201	-1.596	19.496	-41.5881	91.133

3.3 การโก่งเดาะของคานในโหมดอันดับสูง

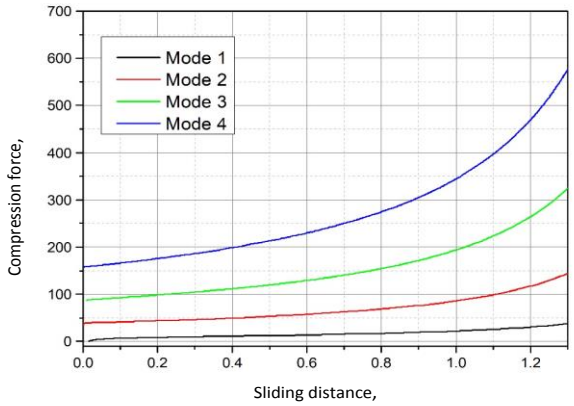
ในหัวข้อนี้จะเสนอการโก่งเดาะของคานในโหมดอันดับสูง ซึ่งได้แก่ โหมดที่ 1, 2, 3 และ 4 โดยพิจารณากำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) เท่ากับ 0, 2 และ 6



รูปที่ 14 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 0

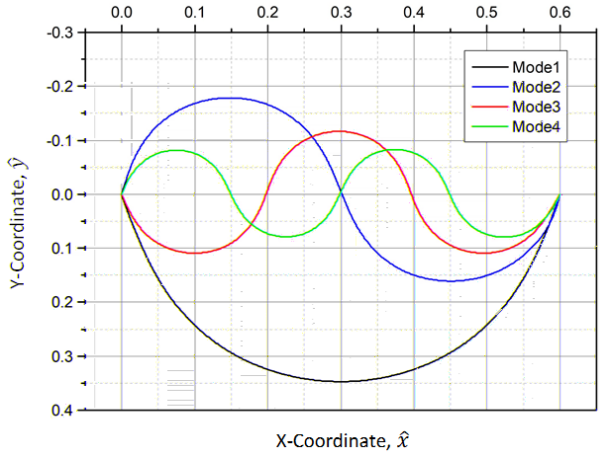


รูปที่ 15 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 2

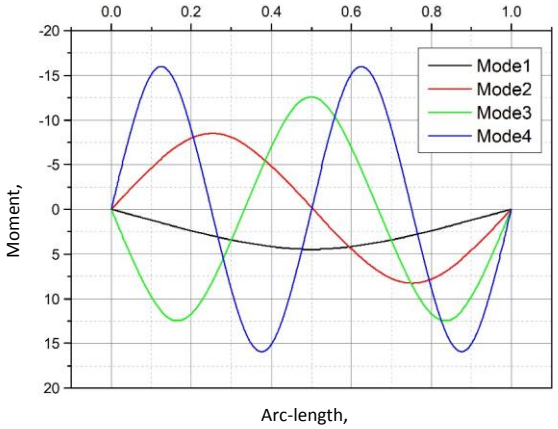


รูปที่ 16 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ( ) ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 6

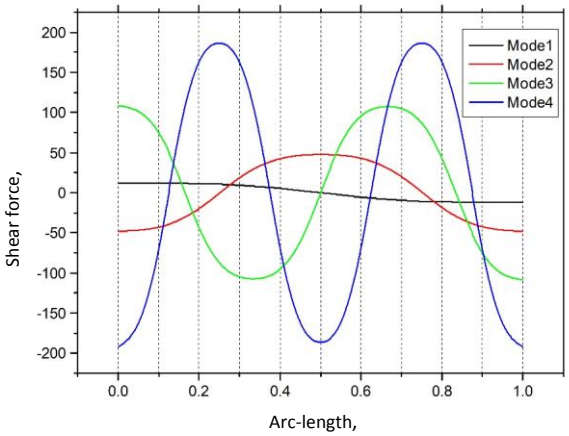
รูปที่ 14-16 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B ( ) และแรงอัด ของโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 0, 2 และ 6 ตามลำดับ พบว่ายิ่งโหมดการโก่งเดาะสูงขึ้นต้องใช้แรงอัดที่จุดรองรับ มากขึ้นเพื่อทำให้จุดรองรับเคลื่อนที่ ( ) โดยจะเห็นได้ว่าผลจากน้ำหนักของคานจะมีผลน้อยมาก โดยกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย



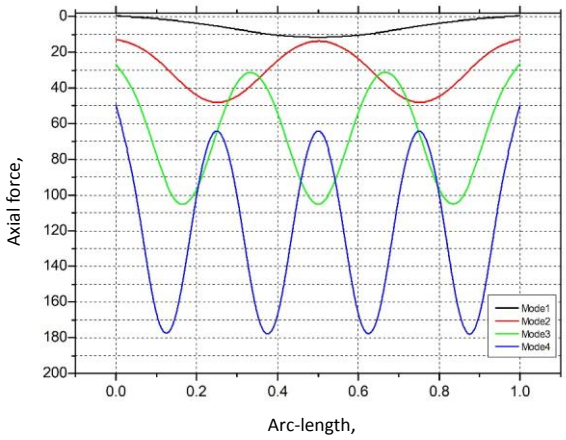
รูปที่ 17 เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 6 และ เท่ากับ 0.4



รูปที่ 18 เปรียบเทียบการกระจายตัวของโมเมนต์ ( ) ตลอดความยาวคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 6 และ เท่ากับ 0.4



รูปที่ 19 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงเฉือน ( ) ตลอดความยาวคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 6 และ เท่ากับ 0.4



รูปที่ 20 เปรียบเทียบการกระจายตัวของแรงตามแนวแกน ( ) ตลอดความยาวคานสำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1, 2, 3 และ 4 เมื่อ เท่ากับ 6 และ เท่ากับ 0.4

เพื่อเปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานจากโหมดการโก่งเดาะต่างๆ **(โหมด 1-4)** โดยพิจารณากรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ( ) เท่ากับ 6 และค่าการเคลื่อนที่ของจุดรองรับเท่ากับ 0.4 **( )** ดังแสดงในรูปที่ 17 พบว่าโหมดการโก่งเดาะของคานขึ้นอยู่กับจำนวนจุดดัดกลับ **(Inflection point)** โดยจำนวนจุดดัดกลับจะเท่ากับ เมื่อ คือลำดับโหมด อย่างไรก็ดีเมื่อโหมดอันดับสูงขึ้น ค่าการแอ่นตัวสูงสุดของคานจะลดลง รูปที่ 18 พบว่าที่โหมดอันดับที่สูงขึ้นจะทำให้เกิดแรงภายในมากขึ้น ซึ่งค่าโมเมนต์สูงสุดจะเกิดที่กึ่งกลางของแต่ละ **loop** หรือตรงตำแหน่งจุดดัดกลับซึ่งมีทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่ที่จุดรองรับจะมีค่าโมเมนต์เป็นศูนย์ จากรูปที่ 19 พบว่าที่โหมดต่างๆ จะมีค่าแรงเฉือนสูงสุดเกิดที่จุดรองรับและที่กึ่งกลางของแต่ละ **loop** และจากรูปที่ 20 พบว่าที่โหมดอันดับสูงขึ้น แรงตามแนวแกนจะเพิ่มขึ้นและมีค่าสูงสุดที่กึ่งกลางคานและกึ่งกลางของแต่ละ **loop**

4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงกระทำด้านข้างและแรงอัดที่ปลายคาน แบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานสร้างขึ้นโดยอาศัยหลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์ โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น จากนั้นหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยวิธียิงเป้า (SM) และตรวจสอบความถูกต้องโดยเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ผลการศึกษาพบว่าน้ำหนักของคานและแรงอัดที่จุดรองรับทำให้จุดรองรับเลื่อนสไลด์และคานเกิดการแอ่นตัวตลอดจนทำให้ เสถียรภาพของคานลดลง โมเมนต์ดัดมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางคาน และมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดรองรับ แรงเฉือนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณจุดรองรับทั้งสองข้างของคาน แรงอัดในแนวแกนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางคาน นอกจากนั้นยังพบว่าแรงอัดที่จัดรองรับต้องมากขึ้นเพื่อให้เกิดการโก่งเดาะในโหมดอันดับสูง โหมดการโก่งเดาะของคานขึ้นอยู่กับจำนวนจุดดัดกลับ โดยจำนวนจุดดัดกลับจะเท่ากับ เมื่อ คือลำดับโหมด เมื่อโหมดอันดับสูงขึ้นทำให้แรงภายในสูงขึ้นแต่ค่าการแอ่นตัวสูงสุดของคานจะลดลง ผลการวิเคราะห์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถนำมาเป็นแนวทางในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างคาน-เสา และโครงสร้างอื่นๆที่มีความชะลูดสูง ทั้งนี้ แบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถนำไปต่อยอดเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับแบบติดตามการเสียรูป

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความอนุเคราะห์สถานที่และสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

[1] สุรพันธ์ บุญเจริญ (2536). *การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนอย่างอิสระโดยใช้วิธีอีลิปติคอินทิกรัลในการหาคำตอบเชิงตัวเลข*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

[2] ธนภัทร วัฒนาบุญศิริ อินทัช ด่านปาน ธนนพ เหมือนเหลา และการันต์ คล้ายฉ่ำ (2563). แรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้. *การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 25*, ชลบุรี, 15-17 กรกฎาคม 2563, หน้า 1-7.

[3] สุนิสา รอดสังวาล (2542). *การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

[4] ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี (2562) *ผลกระทบของจุดรองรับแบบต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุน*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.

[5] Chucheepsakul, S Buncharoen, S. and Huang, T. (1995). Elastica of simple variable-arc-length beam subjected to end moment. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(7), pp.767-772

[6] ศรัณย์ ชุ่มกลัด (2560). *ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.

[7] Areiza-Hurtado, M. and Aristizábal-Ochoa, J.D. (2020). Large-deflection analysis of prismatic and tapered beam-column using the Differential Transform Method. Structure, 28, pp. 923-932.

[8] McHugh, K. and Dowell, E. (2018). Nonlinear Responses of Inextensible Cantilever and Free-Free Beams Undergoing Large Deflections. *Journal of Applied Mechanics*, 85(5): 051008.

[9] Jeong, S. and Yoo, H.H. (2017). Flexibility modeling of a beam undergoing large deflection using the assumed mode method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 133, pp.611-618.

[10] Masjedi, P.K. and Weaver, P.M. (2022). Analytical solution for arbitrary large deflection of geometrically exact beams using the homotropy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*, 103, pp.516-542.

[11] Patel, B.N. and Srinivasan, S.M. (2017). A simplified moment-curvature based approach for large deflection analysis of micro-beams using the consistent couple stress theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 66, pp.45-54.

[12] Giraldo-Londono, O., Monsalve-Giraldo, J.S., and Ariszabal-Ochoa, J.D. (2015). Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77, pp.85-95.

[13] ธัญญลักษณ์ วงษ์นุช, อภิรักษ์ เงินรี และสหัสวัต เลิศสำราญ (2565). *วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเลื่อนสไลด์ได้อิสระในแนวราบ*. วิทยานิพนธ์ปริญญาตรี, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.