วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเลื่อนสไลด์ได้อิสระในแนวราบ
Finite Element Method for Large Deflection Analysis of Free Horizontally Sliding Supported Beam

ธัญญลักษณ์ วงษ์นุช[1] อภิรักษ์ เงินรี[2] สหัสวัต เลิศสำราญ[3] และ การันต์ คล้ายฉ่ำ[4,*]

[1,2,3,4] ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ.นครปฐม
**Corresponding author; E-mail address: karun.kl@ku.ac.th*

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้นำเสนอการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ภายใต้น้ำหนักของคานและแรงอัดที่ปลาย แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานได้รับการพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการงานและพลังงานเสมือน การศึกษานี้ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) แบบไม่เชิงเส้นร่วมกับขั้นตอนทำซ้ำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหาคำตอบเชิงตัวเลข นอกจากนั้นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับการคำนวณหาแรงภายในคานได้จากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยของคาน ซึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับการพัฒนาโดยภาษาฟอร์แทรน 90 ผลการตรวจสอบเชิงตัวเลขพบว่าคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความสอดคล้องกับคำตอบจากวิธียิงเป้า ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าน้ำหนักคานและแรงอัดที่กระทำที่จุดรองรับทำให้จุดรองรับของคานเคลื่อนที่ และเกิดการแอ่นตัวมาก ส่งผลให้คานเกิดการสูญเสียเสถียรภาพ

คำสำคัญ: การแอ่นตัวมาก, นิวตัน-ราฟสัน, วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, หลักการงานและพลังงานเสมือน

Abstract

This research presents a large deflection analysis of beams with moveable support subjected to self-weight and compression at beam tip. A mathematical model of beams has been developed based on virtual work principle. The study used a non-linear Finite Element Method (FEM) combined with the Newton-Raphson iterative method to obtain numerical solutions. In addition, a system of first order non-linear differential equations, which is obtained by considering the force and moment equilibrium of the beam segment is used for calculation the internal force of the beam. The computer program for implementing the finite element algorithm is developed by Fortran 90. The numerical verification revealed that the result obtained from the finite element method were consistent with the result from the shooting method. The result also showed that the beam self-weight and the compressive force acting on the support cause the support movement, which induce large deflection, and instability of the beam.

Keywords: Finite Element Method, Large Deflection, Newton-Raphson, Virtual Work Principles.

1. บทนำ

การวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของคานได้รับความสนใจจากนักวิจัยอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบันโดยอาศัยหลักการ Elastica เป็นทฤษฎีพื้นฐาน ซึ่งนิยมประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาแบบต่างๆ ได้แก่ คานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ คานยื่น และคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้โดยทั่วไป การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานสามารถกระทำได้โดยวิธีเชิงตัวเลข วิธีที่ได้รับความนิยม ได้แก่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้า เป็นต้น ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method: FEM) คือวิธีการนำหลักการทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรม ในเชิงพฤติกรรมของวัสดุ ความร้อน หรือของไหลภายใต้สภาพแวดล้อมที่กำหนดขึ้น โดยอาศัยการแก้ปัญหาระบบสมการอนุพันธ์ย่อยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณของปัญหาที่กำหนดผ่านการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นเทคโนโลยีที่ทันสมัยทำให้ง่ายต่อการขึ้นรูปแบบจำลองและเสมือนโครงสร้างจริงส่งผลให้การคำนวณมีความแม่นยำ ตัวอย่างบทความวิจัยที่นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างที่มีการแอ่นตัวมาก ได้แก่ สุรพันธ์ บุญเจริญ [1] ได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีอีลิปติคอินทิกรัลในการหาคำตอบเชิงตัวเลข สุนิสา รอดสังวาล [2] ได้ศึกษาและวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Giraldo-Londono และคณะ [3] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคาน-เสาที่มีจุดต่อแบบกึ่งแข็งโดยรวมผลกระทบตามแนวแกนและการเฉือน ศรัณย์ ชุ่มกลัด [4] ได้ศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักของตัวเอง Jeong และ Yoo [5] ได้สร้างแบบจำลองของคานที่มีการแอ่นตัวมากโดยใช้วิธี Assumed mode method ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี [5] ได้ศึกษาผลกระทบของจุดรองรับแบบต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุน จากนั้น Wang และคณะ [6] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งต่างๆของคาน Mauricio และคณะ [7] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานและเสาที่มีหน้าตัดคงที่และหน้าตัดที่มีความลึกไม่สม่ำเสมอโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ Masjedi และ Weaver [8] ได้ใช้วิธี Homotopy analysis method เพื่อหาสมการแม่นตรงของปัญหาคานที่มีการแอ่นตัวมากอย่างไรก็ดี งานวิจัยข้างต้นที่กล่าวมายังไม่ได้ศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับสามารถเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงอัดที่ปลายคานและรวมผลกระทบจากแรงทางด้านข้าง

หลังจากที่แทนค่าสมการที่ (12) และ (13) ในสมการที่ (14) จะได้สมการงานเสมือนทั้งของระบบภายใต้เงื่อนไขของระยะการแอ่นตัวของคานที่จุดรองรับด้านขวาดังนี้

$$\delta\pi^* = \int_0^L EI\theta'\delta\theta' ds - \left\{\int_0^L \int_0^s w\cos\theta\,\delta\theta ds ds + P_B\int_0^L \sin\theta\,\delta\theta ds\right\} - \lambda\int_0^L \cos\theta\,\delta\theta ds + \left[y(L) - \int_0^L \sin\theta\, ds\right]\delta\lambda \quad (15)$$

3. แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

จากกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ ค่ามุมหมุน $\theta(s_s)$ ภายในเอลิเมนต์ของคานสามารถประมาณได้โดย

$$\theta(s_s) = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{q}\} \quad (16)$$

ซึ่ง $\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$ คือเมทริกซ์ฟังก์ชันรูปร่าง ซึ่งสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor^T \quad (17)$$

เมื่อ N_i คือฟังก์ชันรูปร่างพหุนามอันดับสาม

$$N_1 = 1 - \frac{11s_s}{2l} + \frac{9s_s^2}{l^2} - \frac{9s_s^3}{l^3} \quad (18ก)$$

$$N_2 = \frac{9s_s}{l} - \frac{45s_s^2}{2l^2} + \frac{27s_s^3}{2l^3} \quad (18ข)$$

$$N_3 = -\frac{9s_s}{2l} + \frac{18s_s^2}{l^2} - \frac{27s_s^3}{l^3} \quad (18ค)$$

$$N_4 = \frac{s_s}{l} + \frac{9s_s^2}{2l^2} - \frac{9s_s^3}{2l^3} \quad (18ง)$$

โดยที่ $l = L/nelem$ คือความยาวเอลิเมนต์ของคาน และ $nelem$ เป็นจำนวนเอลิเมนต์ของคาน เวกเตอร์ $\{\boldsymbol{q}\}$ คือดีกรีอิสระที่จุดต่อขั้วของคานซึ่งสอดคล้องกับค่ามุมหมุน $\theta(s_s)$ ที่ตำแหน่งจุดต่อขั้ว ดังนี้

$$\{\boldsymbol{q}\} = \begin{Bmatrix} \theta(s_s = 0) \\ \theta(s_s = \frac{l}{3}) \\ \theta(s_s = \frac{2l}{3}) \\ \theta(s_s = l) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

จากหลักการของพลังงานเสมือนของระบบ $\pi^* = \sum_{k=1}^{\text{nelem}}\{\pi_k^*\}$ เมื่อ π_k^* คือพลังงานเสมือนของเอลิเมนต์ของคาน ดังนั้นจะสามารถหาสภาวะสมดุลของคานได้ก็ต่อเมื่อ

$$\delta\pi_k^* = \left(\frac{\partial\pi_k^*}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right)\delta\boldsymbol{q}_i + \left(\frac{\partial\pi_k^*}{\partial\lambda}\right)\delta\lambda = 0 \quad (20)$$

เนื่องจาก $\delta\boldsymbol{q}_i$ และ $\delta\lambda$ ไม่เท่ากับศูนย์ดังนั้น $\{\partial\pi_k/\partial\boldsymbol{q}_i\} = \{\boldsymbol{0}\}$ และ $\{\partial\pi_k/\partial\lambda\} = 0$ ซึ่งสามารถเขียนโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$\left\{\frac{\partial\pi_k^*}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right\}_{n+1} = \left\{\frac{\partial\pi_k^*}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right\}_n + \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}_j}\left(\frac{\partial\pi_k^*}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right)\right\}_n \Delta\boldsymbol{q}_n + \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\pi_k^*}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right)\right\}_n \Delta\lambda_n = 0 \quad (21ก)$$

$$\left\{\frac{\partial\pi_k^*}{\partial\lambda}\right\}_{n+1} = \left\{\frac{\partial\pi_k^*}{\partial\lambda}\right\}_n + \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}_i}\left(\frac{\partial\pi_k^*}{\partial\lambda}\right)\right\}_n \Delta\boldsymbol{q}_n + \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\pi_k^*}{\partial\lambda}\right)\right\}_n \Delta\lambda_n = 0 \quad (21ข)$$

โดยที่ $\{\Delta\boldsymbol{q}\}_n = \{\boldsymbol{q}_i\}_{n+1} - \{\boldsymbol{q}_i\}_n$, $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ เมื่อตัวแปร $\boldsymbol{n}$ คือรอบของการทำซ้ำ ดังนั้นหลังจากตัดพจน์ที่มีค่าน้อยๆ ทำให้สามารถเขียนระบบสมการที่ (21) ในรูปแบบเมทริกซ์ ได้ดังนี้

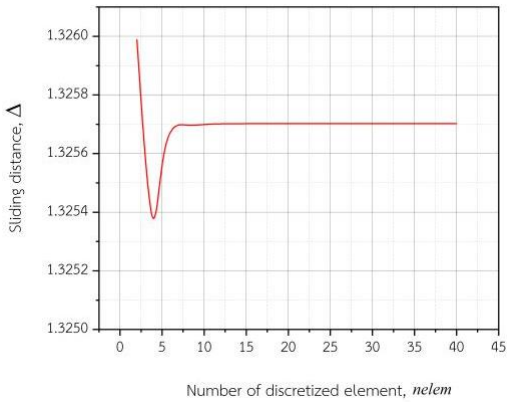
$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{K}_{NL}]_{N\times N} & \{\boldsymbol{K}_\lambda\}_{N\times 1} \\ \{\boldsymbol{K}_\lambda\}^T_{1\times N} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\Delta\boldsymbol{q}_i\} \\ \Delta\lambda\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{R}_i\} \\ R_\lambda\end{Bmatrix} \quad (22)$$

จำนวนเต็ม N คือจำนวนดีกรีอิสระทั้งหมดของระบบคาน เมทริกซ์ $[\boldsymbol{K}_{NL}]$ ได้จากการรวมเมทริกซ์ของเอลิเมนต์เมทริกซ์ $\left[\partial^2\pi_k^*/\partial\boldsymbol{q}_i\partial\boldsymbol{q}_j\right]$ เวกเตอร์ $\{\boldsymbol{K}_\lambda\}$ ได้จากการรวมเวกเตอร์ของเอลิเมนต์ $\{\partial^2\pi_k^*/\partial\lambda\partial\boldsymbol{q}_i\}$ เวกเตอร์ $\{\boldsymbol{R}_i\}$ ได้จากการรวมเวกเตอร์ของเอลิเมนต์ $\{\partial\pi_k^*/\partial\boldsymbol{q}_i\}$ และพารามิเตอร์ R_λ คือค่าผลรวมของ $\partial\pi_k^*/\partial\lambda$ จากทุกเอลิเมนต์

สมการที่ (22) เป็นระบบสมการไม่เชิงเส้นซึ่งจะใช้กระบวนการทำซ้ำแบบ Newton-Raphson ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข จากกระบวนการนี้จะกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่า $\{\boldsymbol{q}_i\}$ และ λ และสร้างระบบสมการที่ (22) จากนั้นคำนวณหาค่าส่วนเพิ่ม $\{\Delta\boldsymbol{q}_i\}$ และ $\Delta\lambda$ และนำค่าที่ได้ไปบวกเพิ่มระหว่างเวกเตอร์ $\{\Delta\boldsymbol{q}_i\}$ กับ $\{\boldsymbol{q}_i\}$ และ $\Delta\lambda$ กับ λ ซึ่งจะทำให้ได้ค่า $\{\boldsymbol{q}_i\}$ และ λ ใหม่ ค่าเหล่านี้จะใช้สำหรับการคำนวณซ้ำต่อไป โดยทำซ้ำขั้นตอนข้างต้นจนกว่าค่า $\{\Delta\boldsymbol{q}_i\}$

4. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

4.1 ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ



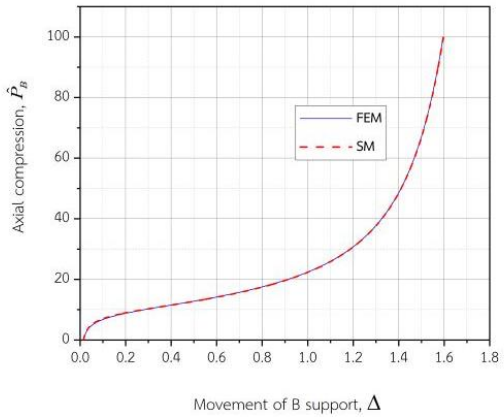
รูปที่ 4 การตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบเชิงตัวเลขเนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์

เนื่องจากความถูกต้องแม่นยำของคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์(FEM) ขึ้นอยู่กับจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ จึงจำเป็นต้องตรวจสอบจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับใช้ในแบบจำลองนี้ หัวข้อนี้ได้ทำการศึกษาผลของจำนวนเอลิเมนต์ต่อค่าของการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B โดยการศึกษานี้ได้กำหนดค่าตัวแปรต่างๆในรูปของตัวแปรไร้หน่วยดังนี้ ได้แก่ ความยาวช่วงคาน ($\hat{L}$) เท่ากับ 1 น้ำหนักคาน ($\hat{w}$) เท่ากับ 6 และแรงที่กระทำต่อจุดรองรับ B ($\hat{P}_B$) มีค่าเท่ากับ 40

จากผลการศึกษาดังแสดงในรูปที่ 4 จะเห็นได้ว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุดตั้งแต่ 8 เอลิเมนต์ขึ้นไปจะทำให้ค่าการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) ลู่เข้าสู่ค่าคงที่ ดังนั้นการหาคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เลือกใช้จำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 10 เอลิเมนต์เพราะสามารถหาคำตอบที่มีความถูกต้องเพียงพอ

4.2 ตรวจสอบค่าความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

ในขั้นตอนนี้จะศึกษาความถูกต้องของแบบจำลองคณิตศาสตร์และผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) โดยเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธียิงเป้า (SM) ซึ่งได้รับการนำเสนอในงานวิจัยของวันวิสา รักษาสุข และคณะ [9] โดยตัวอย่างการวิเคราะห์นี้ได้กำหนดน้ำหนักคาน ($\hat{w}$) เท่ากับ 6 ความยาวช่วงคาน ($\hat{L}$) เท่ากับ 1 และแรงอัดที่จุดรองรับ B ($\hat{P}_B$) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100 เพื่อใช้สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์



รูปที่ 5 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) ที่จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธียิงเป้า (SM)

จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่จุดรองรับ B กับค่าการเคลื่อนที่ในแนวราบของจุดรองรับ B แสดงดังรูปที่ 5 โดยเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) กับวิธียิงเป้า (SM) พบว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จากสองวิธีนี้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี

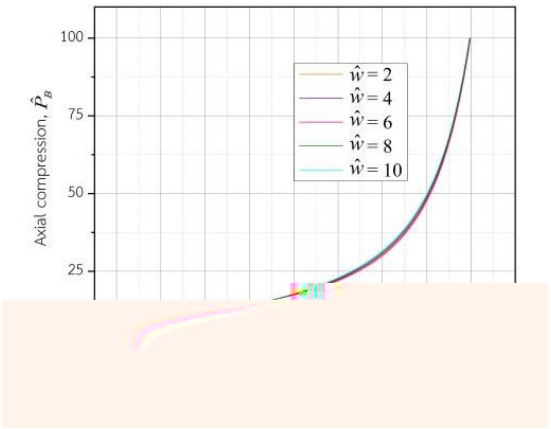
ตารางที่ 1 ตารางเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธียิงเป้า (SM)

$\hat{P}_B$	$\theta_A(-\theta_B)$		$\hat{y}_{max}$		Δ		$\hat{M}_{max}$		$\hat{V}_{max}$		$\hat{T}_{max}$	
	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM	SM
0	0.244	0.244	0.075	0.075	0.014	0.014	0.734	0.734	2.909	2.911	-0.724	-0.725
10	1.085	1.085	0.304	0.304	0.277	0.277	3.510	3.509	10.273	10.244	1.956	2.012
20	2.138	2.138	0.401	0.401	0.914	0.914	7.863	7.859	20.751	19.887	-13.580	-13.287
30	2.544	2.546	0.360	0.360	1.187	1.187	10.437	10.425	30.986	29.766	-26.749	-26.492
40	2.746	2.744	0.321	0.321	1.325	1.326	12.368	12.344	41.093	39.953	-38.280	-38.088
50	2.863	2.861	0.290	0.289	1.410	1.410	13.987	13.944	55.063	48.900	-49.063	-48.924
60	2.937	2.933	0.265	0.265	1.468	1.468	15.419	15.350	69.252	58.935	-59.484	-59.393
70	2.986	2.981	0.246	0.246	1.511	1.512	16.723	16.619	83.473	69.580	-69.717	-69.657
80	3.021	3.014	0.230	0.229	1.545	1.545	17.934	17.776	97.587	79.937	-79.850	-79.819
90	3.045	3.036	0.217	0.215	1.572	1.573	19.071	18.783	111.492	89.947	-89.927	-89.916
100	3.063	3.050	0.205	0.201	1.595	1.596	20.151	19.495	125.108	99.222	-99.972	-99.990

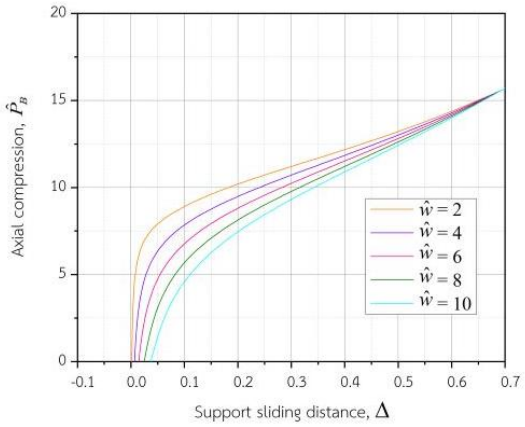
ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบค่ามุมหมุน ($\theta_A(-\theta_B)$) ระยะการแอ่นสูงสุด ($\hat{y}_{max}$) ระยะการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) โมเมนต์ดัดสูงสุด ($\hat{M}_{max}$) แรงเฉือนสูงสุด ($\hat{V}_{max}$) แรงอัดตามแนวแกนสูงสุด ($\hat{T}_{max}$) ภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) ต่างๆ โดยพบว่าคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธียิงเป้า (SM) มีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก

4.3 ผลของน้ำหนักคานและแรงอัดที่จุดรองรับต่อการแอ่นตัวมากของคาน

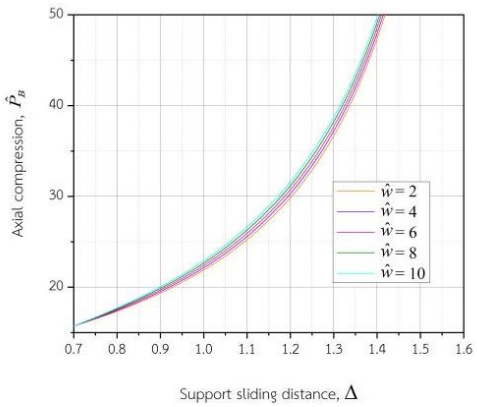
หัวข้อนี้นำเสนอผลของน้ำหนักคานและแรงอัดที่จุดรองรับต่อการแอ่นตัวและเสถียรภาพของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระตามแนวราบ ตัวอย่างการวิเคราะห์นี้กำหนดให้น้ำหนักคาน ($\hat{w}$) เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10 ตามลำดับ และแรงที่อัดจุดรองรับ B ($\hat{P}_B$) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100 ผลการวิเคราะห์ได้นำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) ตามรูปที่ 6



รูปที่ 6 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เมื่อ $\hat{w}$ มีค่าเท่ากับ 2 4 6 8 และ 10



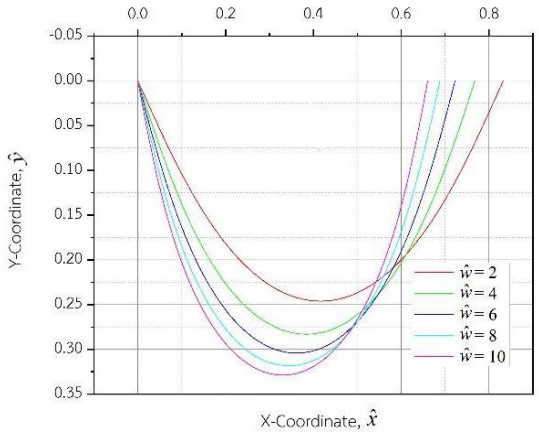
(ก) แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) ในช่วง 0-16



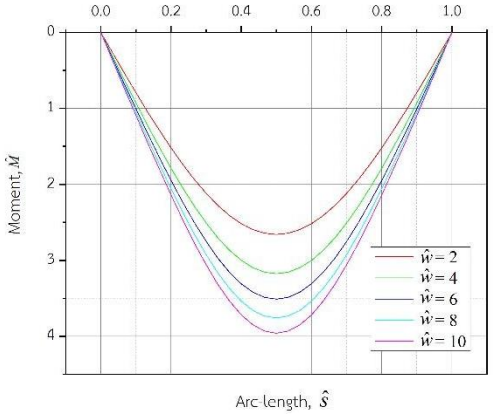
(ข) แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) ในช่วง 16-50

รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) และแรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$)

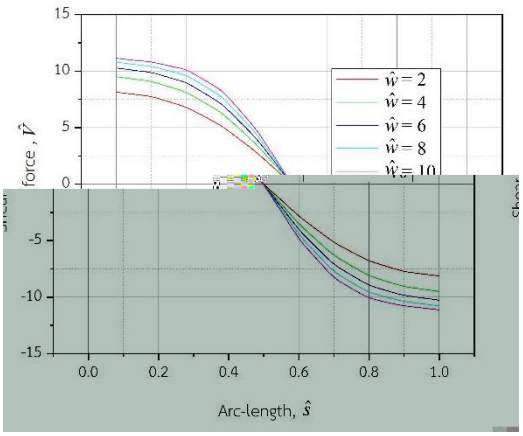
จากรูปที่ 6 พบว่าแรงอัดที่จุดรองรับส่งผลโดยตรงทำให้จุดรองรับเคลื่อนที่เพิ่มมากขึ้น โดยพฤติกรรมที่เกิดขึ้นสามารถแบ่งเป็นสองช่วงดังแสดงในรูปที่ 7(ก) และ 7(ข) โดยรูปที่ 7(ก) แสดงช่วงแรงอัด $\hat{P}_B$ มีค่าตั้งแต่ 0-16 และรูปที่ 7(ข) แสดงช่วงแรงอัด $\hat{P}_B$ มีค่าตั้งแต่ 16-100 ทั้งนี้ผลการศึกษาพบว่าเมื่อ $\hat{P}_B$ น้อยกว่า 16 น้ำหนักของคานส่งผลให้จุดรองรับ B (Δ) เคลื่อนที่มากขึ้น อย่างไรก็ดี เมื่อ $\hat{P}_B$ มากกว่า 16 การเพิ่มน้ำหนักคานทำให้การเคลื่อนที่ของจุดรองรับลดลง (รูปที่ 7(ข))



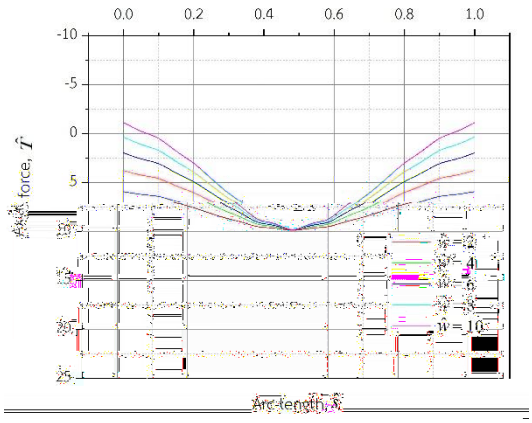
(ก) เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลของคาน



(ข) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคาน



(ค) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงเฉือนตลอดความยาวคาน

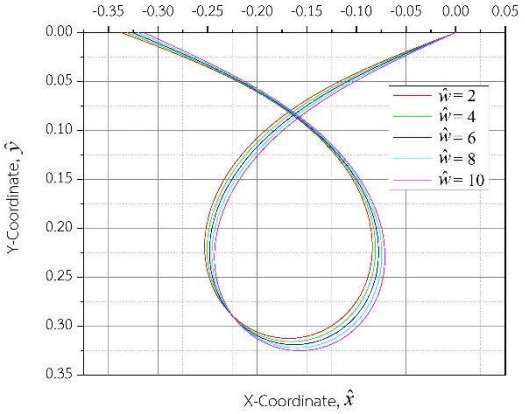


(ง) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงตามแนวแกนตลอดความยาวคาน

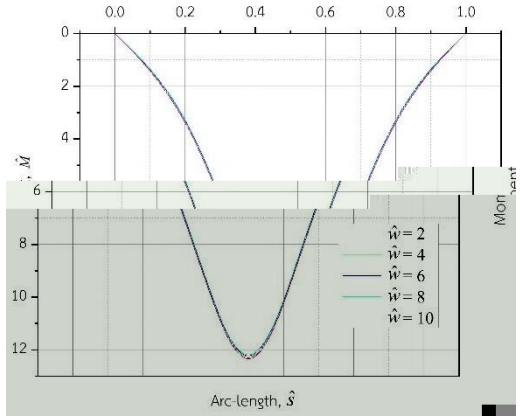
รูปที่ 8 เปรียบเทียบลักษณะรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลของคานและการกระจายตัวของแรงภายในที่เกิดภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 10 โดยกำหนดให้ $\hat{w}$ เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10

รูปที่ 8(ก)-8(ง) แสดงลักษณะการแอ่นตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้นแรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 10 โดยเปรียบเทียบผลของน้ำหนักคาน $\hat{w}$ เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10 จากลักษณะการเสียรูปของคานดังรูปที่ 8(ก) พบว่า การเพิ่มน้ำหนักคานมากขึ้นทำให้จุดรองรับของคานและการแอ่นตัวเพิ่มมากขึ้นซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปก่อนหน้านี้ โดยการแอ่นตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางคาน และส่งผลทำให้โมเมนต์ดัดเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน (รูปที่ 8 (ข)) โดยจะมีค่าสูงสุดที่กึ่งกลางคาน จากรูปที่ 8(ค) พบว่าแรงเฉือนจะมีค่ามากขึ้นเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้น และเกิดแรงเฉือนสูงสุดบริเวณจุดรองรับทั้งสองข้าง และจากรูปที่ 8(ง) พบว่าแรงตามแนวแกนเป็นแรงอัดและมีค่าสูงสุดที่กึ่งกลางคาน แต่เมื่อน้ำหนักคานมากขึ้นอาจส่งผลให้แรงในแนวแกนที่จุดรองรับเปลี่ยนเป็นแรงดึง (เมื่อ $\hat{w}$=10)

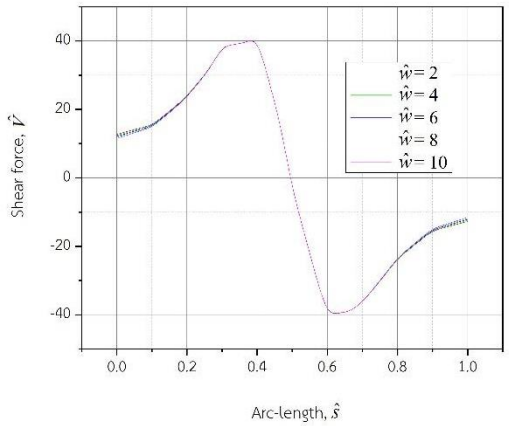
ในทำนองเดียวกัน รูปที่ 9(ก)-9(ง) แสดงลักษณะการแอ่นตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้นแรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 40 โดยเปรียบเทียบผลของน้ำหนักคาน $\hat{w}$ เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10 จากลักษณะการเสียรูปของคานแสดงดังรูปที่ 9(ก) พบว่า น้ำหนักคานที่มากขึ้นทำให้คานเกิดการแอ่นตัวมากขึ้นซึ่งการแอ่นตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางคาน อย่างไรก็ดีพบว่าการเคลื่อนที่ของจุดรองรับมีค่าลดลง จากรูปที่ 9(ข) พบว่าเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้นส่งผลให้โมเมนต์เพิ่มขึ้นเล็กน้อย และค่าสูงสุดเกิดที่กึ่งกลางคานซึ่งสอดคล้องกับการแอ่นตัวของคาน จากรูปที่ 9(ค) พบว่าแรงเฉือนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อน้ำหนักคานมากขึ้น ทั้งนี้แรงเฉือนสูงสุดเกิดบริเวณระยะ 2/5 ของความยาวคานจากปลายทั้งสองด้าน และจากรูปที่ 9(ง) พบว่าแรงตามแนวแกนสูงสุดเกิดขึ้นที่กึ่งกลางคานซึ่งเป็นแรงอัด แต่บริเวณจุดรองรับทั้งสองข้างของคานจะเกิดแรงดึง



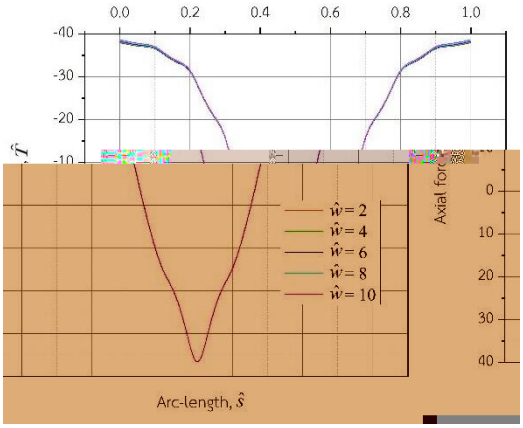
(ก) เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลของคาน



(ข) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคาน



(ค) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงเฉือนตลอดความยาวคาน



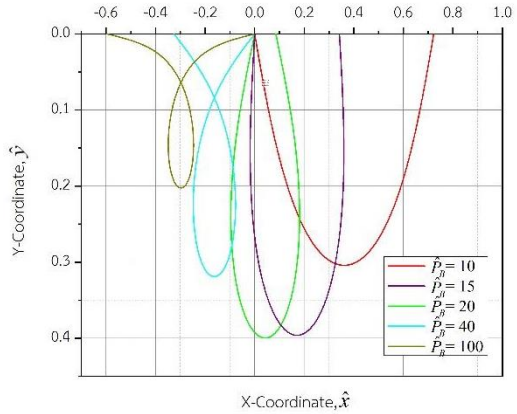
(ง) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงตามแนวแกนตลอดความยาวคาน

รูปที่ 9 เปรียบเทียบลักษณะรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลของคานและการกระจายตัวของแรงภายในที่เกิดภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 40 โดยกำหนดให้ $\widehat{w}$ เท่ากับ 2 4 6 8 และ 10

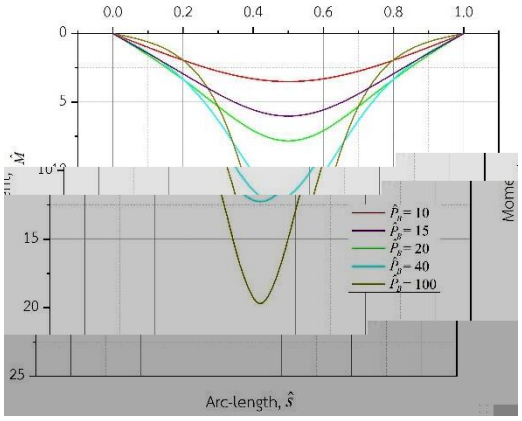
ตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขภายใต้น้ำหนักคานต่างๆ และแรงอัด ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 10 และ 40

P_B	w	$\theta_A(-\theta_B)$	y_{max}	Δ	M_{max}	V_{max}	T_{max}	λ
10	2	0.83	0.25	0.17	2.66	8.13	5.92	1.0
	4	0.99	0.28	0.23	3.18	9.5	3.76	2.0
	6	1.09	0.3	0.28	3.51	10.27	1.96	3.0
	8	1.15	0.32	0.31	3.76	10.78	0.35	4.0
	10	1.21	0.33	0.34	3.96	11.13	-1.14	5.0
40	2	2.78	0.31	1.34	12.45	12.45	41.04	1.0
	4	2.76	0.32	1.33	12.41	41.07	-4.41	2.0
	6	2.75	0.32	1.33	12.37	41.09	-38.28	3.0
	8	2.73	0.32	1.32	12.33	41.12	-4.54	4.0
	10	2.71	0.33	1.31	12.29	41.15	-4.62	5.0

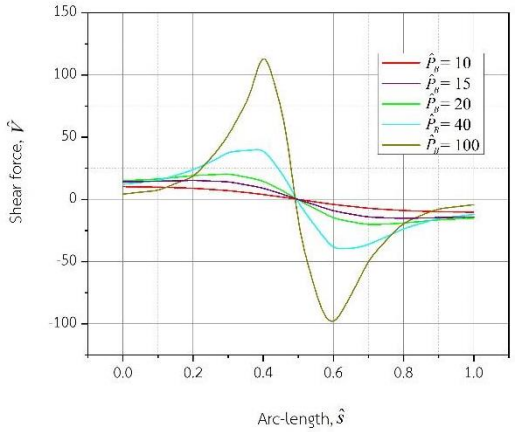
นอกจากนั้นผลคำตอบเชิงตัวเลขถูกนำเสนอในตารางที่ 2 ได้แก่ค่ามุมหมุนที่จุดรองรับ ($\theta_A(-\theta_B)$) ระยะการแอ่นสูงสุด ($\hat{y}_{max}$) ระยะการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ B (Δ) โมเมนต์ดัดสูงสุด ($\hat{M}_{max}$) แรงเฉือนสูงสุด ($\hat{V}_{max}$) แรงอัดในแนวแกนสูงสุด ($\hat{T}_{max}$) และค่าตัวคูณลากรองจ์ (λ) จากการศึกษาพบว่าความหมายทางกายภาพของตัวคูณลากรองจ์ (λ) คือ แรงปฏิกิริยาในแนวดิ่งที่จุดรองรับ B ซึ่งมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของน้ำหนักคาน



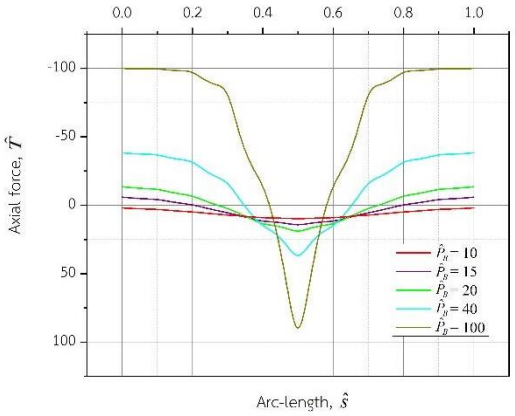
(ก) เปรียบเทียบรูปร่างการแอ่นตัวของคานที่สภาวะสมดุล



(ข) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคาน



(ค) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงเฉือนตลอดความยาวคาน



(ง) เปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของแรงอัดตามแนวแกน

รูปที่ 10 เปรียบเทียบลักษณะรูปร่างการแอ่นตัวและแรงภายในที่ตำแหน่งต่างๆ ของคานภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 เมื่อ $\widehat{w}$ เท่ากับ 6

นอกจากนั้น การศึกษานี้ได้นำเสนอการแอ่นตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากผลของแรงอัดที่จุดรองรับ B โดยกำหนดให้ $\hat{P}_B$ เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 ตามลำดับ น้ำหนักคาน ($\widehat{w}$) เท่ากับ 6 จากลักษณะการเสียรูปของคานพบว่าค่า $\hat{P}_B$ ส่งผลทำให้จุดรองรับเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งจุดรองรับด้านขวาเคลื่อนที่ผ่านจุดรองรับด้านซ้ายดังแสดงในรูปที่ 10(ก) และแรงอัด $\hat{P}_B$ ส่งผลให้โมเมนต์ดัดเพิ่มมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 10(ข) จากการกระจายตัวของแรงเฉือนดังแสดงในรูปที่ 10(ค) พบว่าแรง

เฉือน ($\hat{V}$) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่กึ่งกลางคาน (ที่ $\hat{s}$=0.5) จากการกระจายตัวของแรงอัดตามแนวแกนดังแสดงในรูปที่ 10(ง) พบว่าแรงในแนวแกนสูงสุดเป็นแรงอัดที่บริเวณกึ่งกลางคาน และเมื่อแรงอัดที่จุดรองรับ $\hat{P}_B$ เพิ่มขึ้นทำให้แรงในแนวแกนสูงสุดเปลี่ยนเป็นแรงดึงที่บริเวณจุดรองรับทั้งสองด้านของคาน ($\hat{P}_B$=100) ทั้งนี้ผลวิเคราะห์เชิงตัวเลขของคานภายใต้แรงอัด $\hat{P}_B$ เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 เมื่อน้ำหนักคาน ($\hat{w}$) เท่ากับ 6 ได้ถูกนำเสนอในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลคำตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ ($\hat{P}_B$) เท่ากับ 10 15 20 40 และ 100 เมื่อ $\hat{w}$ เท่ากับ 6

P_B	$\theta_A\left(-\theta_B\right)$	y_{max}	Δ	M_{max}	V_{max}	T_{max}
10	1.09	0.3	0.28	3.51	10.27	1.96
15	1.75	0.4	0.66	6.04	15.36	-5.97
20	2.14	0.4	0.91	7.86	20.75	-13.58
40	2.75	0.32	1.33	12.37	41.09	-38.28
100	3.06	0.21	1.6	20.15	125.11	-99.97

ตารางที่ 3 แสดงค่ามุม ($\theta_A(-\theta_B)$) ระยะการแอ่นตัวสูงสุด ($\hat{y}_{max}$) ระยะการเคลื่อนที่ของจุดรองรับเคลื่อนที่ (Δ) โมเมนต์สูงสุด ($\hat{M}_{max}$) แรงเฉือนสูงสุด ($\hat{V}_{max}$) และแรงในแนวแกนสูงสุด ($\hat{T}_{max}$) พบว่า ผลจากแรงอัดที่กระทำที่จุดรองรับ ในช่วงที่ $\hat{P}_B$ เท่ากับ 10 15 และ 20 ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าเพิ่มขึ้นตามแรงอัดที่กระทำ แต่เมื่อแรงอัดที่จุดรองรับ ในช่วงที่ $\hat{P}_B$ เท่ากับ 40 และ 100 ค่ามุมที่จุดรองรับ และระยะการแอ่นตัวสูงสุด ($\hat{y}_{max}$) มีค่าลดลง หรือเกิดการสูญเสียเสถียรภาพของคานขึ้น

5. สรุป

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาและวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้อิสระในแนวราบภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานได้รับการพัฒนาโดยอาศัยหลักการงานและพลังงานเสมือน จากนั้นประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาผลคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหา จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่ามีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากวิธียิงเป้าที่ได้รับการนำเสนอในงานวิจัยในอดีต นอกจากนั้นยังพบว่าน้ำหนักคานและแรงอัดที่จุดรองรับมีผลต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคาน ซึ่งทำให้จุดรองรับเคลื่อนที่เพิ่มมากขึ้นและทำให้คานเกิดการแอ่นตัวมาก ตลอดจนทำให้แรงภายในได้แก่ โมเมนต์ดัด แรงเฉือนและแรงตามแนวแกนเพิ่มขึ้น ทั้งนี้โมเมนต์ดัดจะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณกึ่งกลางคาน ส่วนแรงเฉือนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณจุดรองรับ แรงตามแนวแกนเป็นแรงอัดและมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางคาน อย่างไรก็ดี หากแรงอัดที่จุดรองรับเพิ่มมากขึ้นจะทำให้จุดรองรับด้านขวาเคลื่อนที่ผ่านจุดรองรับด้านซ้าย แรงตามแนวแกนบริเวณจุดรองรับทั้งสองด้านจะเปลี่ยนจากแรงอัดเป็นแรงดึง

6. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความอนุเคราะห์สถานที่สำหรับการทำวิจัยและสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง

[1] สุรพันธ์ บุญเจริญ (2536). *การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนอย่างอิสระโดยใช้วิธีอีลิปติคอินทิกรัลในการหาคำตอบเชิงตัวเลข*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

[2] สุนิสา รอดสังวาล (2542). *การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

[3] Giraldo-Londono, O., Monsalve-Giraldo, J.S., and Ariszabal-Ochoa, J.D. (2015). Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77, pp.85-95.

[4] ศรัณย์ ชุ่มกลัด (2560). *ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.

[5] Jeong, S. and Yoo, H.H. (2017). Flexibility modeling of a beam undergoing large deflection using the assumed mode method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 133, pp.611-618.

[6] ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี (2562). *ผลกระทบของจุดรองรับแบบต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุน*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.

[7] Areiza-Hurtado, M. and Aristizábal-Ochoa, J.D. (2020). Large-deflection analysis of prismatic and tapered beam-column using the Differential Transform Method. *Structure*, 28, pp.923-932.

[8] Masjedi, P.K. and Weaver, P.M. (2022). Analytical solution for arbitrary large deflection of geometrically exact beams using the homotopy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*, 103, pp.516-542.

[9] วันวิสา รักษาสุข, อภิญญา ศิริศรีรัตนา และปฏิญญา แก้วคูนอก. (2565). *การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับเคลื่อนที่ได้โดยวิธียิงเป้า*. วิทยานิพนธ์ปริญญาตรี, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, นครปฐม

[10] Timoshenko, S.P., Gere J.M. (1961). *Theory of elastic stability*. The McGraw-Hill Companies, Inc., pp.76-82.

[11] Langhaar H.L. (1962). *Energy methods in applied mechanics*. The john Wiley and Sons, Inc., pp.201-224.