

ผลกระทบจากแรงตึงผิวที่มีผลต่อการโก่งตัวมากของนาโนรอดยื่นรับน้ำหนักของตัวเอง

EFFECT OF SURFACE STRESS ON POST-BUCKLING OF CANTILEVER NANORODS UNDER SELF-WEIGHT

นริศร ปรภายประเสริฐ^{1,*}, ศ.ดร.สมชาย ชูชีพสกุล¹

¹ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กรุงเทพฯ, ประเทศไทย

*Corresponding author address: narisorns@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการตรวจสอบผลกระทบจากแรงตึงผิวที่มีผลต่อการโก่งตัวมากของแท่งนาโนภายใต้น้ำหนักตัวเอง หลักงานเสมือนพลังงานที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองสมการซึ่งประกอบด้วยพลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการดัด งานเสมือนของแรงตึงผิวและงานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักตัวเอง ระบบพิกัดอินทรีนสิกซึ่งเป็นมุมของการหมุนถูกใช้เพื่อกำหนดค่าการโก่งตัวมาก ปัญหานี้เป็นแบบไม่เชิงเส้นซึ่งไม่มีคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่แน่นอน ดังนั้นวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับนิวตัน-ราฟสันนำมาใช้ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ระเบียบวิธียิงเป้าได้นำมาใช้เพื่อตรวจสอบความแม่นยำกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากการศึกษาผลกระทบจากแรงตึงผิวที่มีผลต่อการโก่งตัวพบว่าผลกระทบจากแรงตึงผิวมีแนวโน้มที่จะลดค่าของการโก่งตัวได้

คำสำคัญ: วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, ระบบพิกัดอินทรีนสิก, การโก่งตัวมาก, แรงตึงผิว

Abstract

This paper presents an investigation of effect of surface stress on post-buckling of nanorods under its own weight. The principle of virtual work-energy is used in the model formulation which includes virtual strain energy due to bending, virtual work of surface stress, and virtual work due to self-weight. The intrinsic coordinate, which is the rotation angle, is used to define the post-buckling configuration. The problem is nonlinear, an analytical exact solution is unavailable. Therefore, the finite element method and the Newton-Raphson are used to obtain the numerical solution. The shooting method is also used to verify the results from the finite element method. The effect of surface stress on the post-buckling shapes are studied, the results show that the effect of surface stress tends to decrease the post-buckling configuration.

Keywords: Finite Element Method, Intrinsic Coordinates, Post-buckling Shape, Surface Stress.

1. บทนำ

การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากและพฤติกรรมหลังการโก่งตัวของแท่งนาโนยื่นเป็นปัญหาในทฤษฎียืดหยุ่นของโครงสร้าง พฤติกรรมของแท่งนาโนเมื่อรับน้ำหนักของตัวเองหรือถูกน้ำหนักกระทำจากภายนอกจะทำให้เกิดการดัดและเกิดการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของโครงสร้าง ซึ่งเป็นปัญหาแบบอีลาสติก (Elastica) โดยเกี่ยวเนื่องในงานวิศวกรรมเช่น ปัญหาทางท่อลำเลียงต่างๆ ปัญหาการแอ่นตัวของโครงสร้างสามารถพบได้ในตำราเรียนและหนังสืออ้างอิงต่างๆ ตัวอย่างเช่น Timoshenko and Goodier [1], Frisch-Fay [2] และ Wang and Wang [3] การศึกษาโดยวิธีการวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะนี้มีหลายวิธีได้แก่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method, FEM) และระเบียบวิธีการยิงเป้า (Shooting Method, SM) Golley [4] ได้ศึกษาแบบจำลองสมการเพื่อแก้ปัญหาการโก่งตัวมากด้วยวิธีอินทรีนสิกไฟไนต์เอลิเมนต์ Ngiam [5] ได้ศึกษาการโก่งตัวมากของท่อส่งนอกชายฝั่งโดยใช้ระบบพิกัดอินทรีนสิก Rao et al [6] ได้ศึกษาวิธีแก้สำหรับการโก่งตัวมากของคานายื่นโดยใช้รุ่งเง-คุดตา (Runge-Kutta) ลำดับที่สี่และพัฒนา

สมการเพื่อแก้ปัญหาการโก่งตัวมากภายใต้แรงกระจายโดยสมการอินทิเกรตดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง Sripirom [7] ได้ศึกษาการโก่งตัวมากของคานายื่นโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ระบบพิกัดอินทรีนสิกสำหรับการพัฒนาสมการและคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ปัจจุบันทฤษฎีเหล่านี้ได้นำไปประยุกต์ใช้กับโครงสร้างนาโนเนื่องจากมีคุณสมบัติทางกล ไฟฟ้า แสง และเคมี เหนือกว่าวัสดุทั่วไป เพื่อที่จะศึกษาอิทธิพลของมาตราส่วนที่มีขนาดเล็ก Eringen [8] จึงค้นคว้าเกี่ยวกับทฤษฎีความยืดหยุ่นแบบไม่เฉพาะที่ โดยสมมุติว่าความเครียดที่จุดอ้างอิงแทนความเครียดในทุกจุดของวัตถุ ด้วยวิธีนี้ทำให้มีข้อมูลเกี่ยวกับแรงและระยะจึงใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบเชิงตัวเลข Mahasuwanchai [9] ได้ศึกษาการใช้วิธีระเบียบวิธีการยิงเป้าคำนวณการโก่งตัวมากของคานายื่น

ผลกระทบของแรงตึงผิว (Surface Stress) ได้มีการศึกษาเบื้องต้นโดย Gurtin and Murdoch [10] การค้นพบเหล่านี้ถูกรวมไว้ในภายหลังนักวิจัยหลายคนเพื่อที่จะตรวจสอบพฤติกรรมการดัดงอของเส้นใยนาโนโดยใช้แบบจำลองคานายื่นออยเลอร์ ซึ่งมีผลของแรงเฉือนรวมอยู่ด้วย Wang et al [11] ได้สรุปผลกระทบของแรงตึงผิว

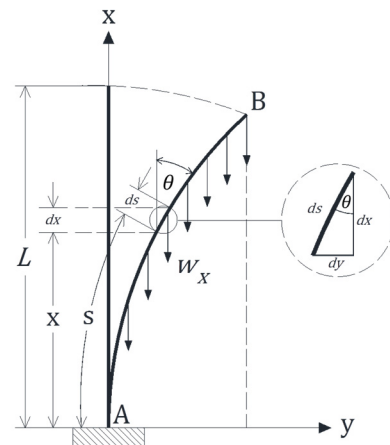
ในกลศาสตร์ขององค์ประกอบโครงสร้างนาโน ยกตัวอย่างเช่น คานนาโน, ท่อนาโน และวัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกันที่มีนาโนสเกลในความเป็นเนื้อเดียวกัน นอกเหนือจากนี้ Duan and Wang [12] ได้ศึกษาค่าการโก่งตัวของคานนาโนของเสาภายใต้เงื่อนไขต่างๆพบว่าค่าวิกฤตการโก่งตัวมากของเสาภายใต้การรับน้ำหนักตัวเองมีค่าเท่ากับ (7.8373) ต่อมา Wang and Yang [13] ได้ศึกษาการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขการโก่งตัวของคานนาโน Juntatasaid et al. [14] ได้ศึกษาวิธีการแปรผันสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของแท่งนาโนโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระบบพิกัดอินทรีนสิก

สำหรับงานวิจัยนี้การศึกษาเกี่ยวกับแท่งนาโนยื่นอิสระส่วนพื้นผิวต่อปริมาตรขนาดใหญ่ความเครียดของพื้นผิวและความยืดหยุ่นเป็นผลกระทบที่สำคัญที่อธิบายพฤติกรรมของแท่งนาโน ดังนั้นจึงต้องศึกษาผลกระทบที่เกิดจากความเครียดที่พื้นผิวของแท่งนาโนโดยใช้หลักงานเสมือนพลังงานเพื่อสร้างแบบจำลองสมการใช้ระบบพิกัดอินทรีนสิกไฟไนต์เอลิเมนต์และนิวตัน-ราฟสันในการหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธีการวิเคราะห์ปัญหาผลกระทบที่เกิดจากความเครียดของแท่งนาโนยื่นอิสระโดยรับน้ำหนักตัวเองใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งวิธีนี้สามารถหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยการกำหนดการรับน้ำหนักและเงื่อนไขขอบเขตและใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้า เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์โดยเปรียบเทียบควบคู่กัน

2. ทฤษฎีและสมการครอบคลุมปัญหา

ระบบพิกัดอินทรีนสิกเป็นความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางตามแนวแกน s และฟังก์ชันมุมหมุน $\theta(s)$ นำมาใช้สำหรับปัญหาการโก่งตัวมากภายใต้แรงกระทำสม่ำเสมอตลอดความยาวแท่งและแรงแบบจุดที่ปลายคาน ในการศึกษานี้สมมติฐานที่ว่าแท่งนาโนมีความยืดหยุ่นในการดัดและอาจเกิดการโก่งตัวได้มากแต่มีความเครียดน้อยเช่นปัญหาความยืดหยุ่นแบบคลาสสิกโดยที่การเปลี่ยนรูปของแรงเฉือนและแรงตามแนวแกนจะถูกละทิ้งไป ความโค้งมีความแม่นยำสอดคล้องกับทฤษฎีอีลาสติกถูกนำมาใช้เพื่อหาค่าการโก่งตัวมากและกำหนดค่าหลังการเสียรูปของแท่งนาโน นอกจากนี้ยังได้แนวทางการเปลี่ยนแปลงสมการสำหรับการโก่งตัวมากและหลังการเสียรูปของแท่งนาโนโดยวิธีระบบพิกัดอินทรีนสิกไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับสมการที่พัฒนาขึ้นในการวิเคราะห์ผลกระทบที่เกิดจากความเครียดที่พื้นผิวและหลักงานเสมือนและสามารถใช้วิธีตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier) ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

ในการสร้างสมการครอบคลุมปัญหาอ้างอิงตามรูปที่ 1 แสดงปัญหาการโก่งตัวมากของแท่งนาโนยื่น กำหนดให้คานตั้งตามแนวแกน x โดย AB คือตำแหน่งแท่งนาโนยื่นจากการรับน้ำหนักตัวเองในลักษณะการโก่งตัวมาก



รูปที่ 1 แบบจำลองแท่งนาโนยื่นภายใต้การรับน้ำหนักตนเองตามแนวแกน x

2.1. กำหนดรูปแบบสมการ

การกำหนดแบบจำลองที่ใช้ในการศึกษานี้พัฒนาโดยวิธีการแบบผันแปร ประการแรกพลังงานความเครียดเนื่องจากการโค้งงอสามารถเขียนได้ในรูปแบบต่อไปนี้

$$U_b = \int_0^L \frac{1}{2} EI (\theta')^2 ds \quad (1)$$

โดยที่ $\theta' = d\theta/ds$ และ EI คือความแข็งแกร่งดัดของวัสดุของหน้าตัดแท่งนาโน จากนั้นเปลี่ยนรูปจากสมการพลังงานความเครียดจากแรงดัดเป็นพลังงานความเครียดเสมือนจากแรงดัดจะได้เป็น

$$\delta U_b = \int_0^L EI \theta' ds \delta \theta' \quad (2)$$

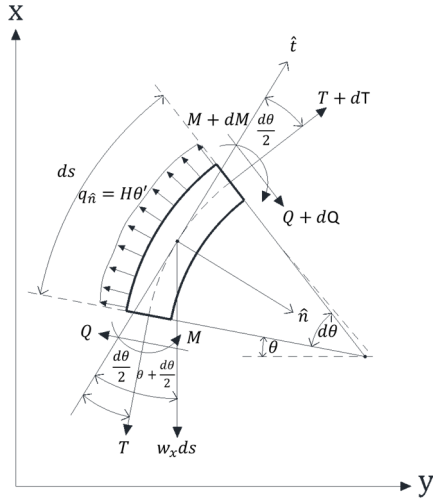
2.2. แรงดึงผิวของแท่งนาโน

ในทฤษฎีความยืดหยุ่นของพื้นผิว แรงดึงผิวมีความเกี่ยวข้องกับความหนาแน่นของพื้นผิว ซึ่งเป็นผลระหว่างแรงเฉือนกับชั้นผิวและวัสดุจำนวนมากที่ก่อให้เกิดแรงกระจายในทิศทางตามยาว โดยแรงดึงผิวแปรผันตรงกับความโค้งของแท่งนาโนซึ่งรายละเอียดของแรงดึงผิว ตามวิธีระบบพิกัดอินทรีนสิกในงานวิจัยนี้ ใช้ระยะตามการเสียรูปแกน s และฟังก์ชันมุมหมุน $\theta(s)$ เพื่อหาค่าการโก่งตัวมากของแท่งนาโน โดยพลังงานความเครียดเสมือนของแรงดึงผิวแสดงได้ดังนี้

$$\delta U_s = \int_0^L \frac{1}{2} E^s I^s \theta' ds \delta \theta' + \int_0^L H \theta ds \delta \theta \quad (3)$$

เมื่อ E^s คือค่าความยืดหยุ่นพื้นผิว ซึ่งได้จากการทดลองและ

การจำลองอะตอมและ I^S คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อย สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า $I^S = \left(\frac{bh^2}{2}\right) + \left(\frac{h^3}{6}\right)$ และ $I^S = \frac{\pi D^3}{8}$ สำหรับหน้าตัดวงกลม โดย b และ h คือความกว้างและความลึกของหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในขณะที่ D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัดวงกลม, H คือค่าที่ได้จากแรงตึงผิว (τ^S) ซึ่งขึ้นอยู่กับรูปร่างของหน้าตัด สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าและวงกลมของแท่งนาโน $H = 2\tau^S b$ และ $H = 2\tau^S D$ ตามลำดับ การจำลองสมการที่ (3) สมการเทอมแรกคือพลังงานเสมือนความเครียดเนื่องจากแรงคดของพื้นผิว ซึ่งมีรูปแบบเหมือนกับพลังงานเสมือนความเครียดเนื่องจากแรงคดของวัตถุของแท่งนาโน ความแข็งในการคดของพื้นผิวมาจากค่าความยืดหยุ่นของพื้นผิวและค่าโมเมนต์ความเฉื่อยสมการเทอมที่สองสอดคล้องกับพลังงานความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนระหว่างพื้นผิวและวัตถุของแท่งนาโน



รูปที่ 2 แบบจำลองชิ้นส่วนของแท่งนาโนภายใต้การรับน้ำหนักตัวเอง

ปริมาณงานของชิ้นส่วนเล็กๆ ds ภายใต้การรับน้ำหนักบรรทุกตัวเอง w_x ณ ตำแหน่ง x ใดๆสามารถเขียนดังนี้

$$dw_x = (-w_x ds)(x(s)) \quad (4)$$

$$\therefore dx(s) = \cos\theta ds \quad (5)$$

$$\int_0^{x(s)} dx(s) = x(s) = \int_0^s \cos\theta ds \quad (6)$$

$$dW_{w_x} = -(w_x ds) \int_0^s \cos\theta ds \quad (7)$$

$$\int dW_{w_x} = W_{w_x} = - \int_0^L \int_0^s w_x \cos\theta ds ds \quad (8)$$

งานเสมือนของน้ำหนักตัวเองตลอดความยาวแท่งนาโนมีค่าเท่ากับ

$$\delta W_{w_x} = \int_0^L \int_0^s w_x \sin\theta ds ds \delta\theta \quad (9)$$

พลังงานเสมือนทั้งหมดของแท่งนาโนภายใต้การรับน้ำหนักตัวเองสามารถเขียนดังนี้

$$\delta\pi = \delta U_s - \delta W_{w_x} \quad (10)$$

$$\delta\pi = \int_0^L \frac{1}{2} E^s I^s \theta' ds \delta\theta' + \int_0^L H \theta ds \delta\theta - \int_0^L \int_0^s w_x \sin\theta ds ds \delta\theta \quad (11)$$

3. วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นกระบวนการวิเคราะห์ทางเชิงตัวเลขเพื่อใช้หาค่าตอบแบบประมาณของระบบพิกัดอินทรินสิกของสมการที่กำหนด โดยวิธีการนี้จะทำการแบ่งความยาวส่วนโค้งของแท่งนาโนเป็นจำนวนชิ้นส่วนย่อยที่นับได้ ส่วนฟังก์ชันมุมหมุนในชิ้นส่วนย่อยประมาณค่าโดยใช้วิธี ลากรานจ์ (Largrange's interpolation) หรือเป็นชิ้นส่วนย่อยแบบ C^0 ดังนั้นฟังก์ชันมุมหมุนเป็นดังนี้

$$\theta(s) = [N]\{q\} \quad (12)$$

ซึ่ง $[N]$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างพหุนามลูกบาศก์ (cubic polynomials) ประกอบด้วย

$$N_1 = 1 - \frac{11s}{2l} + \frac{9s^2}{l^2} - \frac{9s^3}{2l^3} \quad (13ก)$$

$$N_2 = \frac{9s}{l} - \frac{45s^2}{2l^2} + \frac{27s^3}{2l^3} \quad (13ข)$$

$$N_3 = -\frac{9s}{2l} + \frac{18s^2}{l^2} - \frac{27s^3}{2l^3} \quad (13ค)$$

$$N_4 = \frac{s}{l} + \frac{9s^3}{2l^3} + \frac{9s^3}{2l^3} \quad (13ง)$$

เมื่อ l คือความยาวชิ้นส่วนย่อยของแท่งนาโนและ $\{q\}$ คือค่าของฟังก์ชันมุมหมุนที่ตำแหน่งต่างๆของโหนดในชิ้นส่วนย่อยซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \theta(s=0) \\ \theta\left(s=\frac{1}{3}\right) \\ \theta\left(s=\frac{2l}{3}\right) \\ \theta(s=1) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

สำหรับอินทิกรัลเดียวจากรูป $\int f(s)ds$ ใช้การกำหนดรูปแบบสมการเกาส์เซียน (Gaussian quadrature integration) สำหรับอินทิกรัลเดียวสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในช่วง $[0, L]$ ซึ่งสามารถกำหนด s เป็นพิกัดหนึ่งในช่วงแสดงเป็น $[0 < s < L]$ และ ξ สำหรับช่วง $[-1 < \xi < 1]$ ดังนั้นอินทิกรัลเดียวเขียนได้เป็น

$$\int_0^s f(t)dt = \int_{-1}^1 \left(\frac{dt}{d\xi}\right) d\xi \quad (15)$$

$$= \frac{s}{2} \sum_{i=1}^n W_i f(1 + \xi_i)$$

อินทิกรัลในรูปแบบสองครั้ง $\int_0^L \int_0^s f(s) ds ds$ สามารถแสดงในรูปของ $\int_0^L \int_0^s f(t) dt ds$ ฉะนั้นในรูปของสมการเกาส์เซียนสามารถประยุกต์ใช้ในช่วง $[0, s]$ เขียนได้เป็น

$$\int_0^L \int_0^s f(t) dt ds = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(t) \frac{dt}{d\xi} d\xi \right) \frac{ds}{d\xi} d\xi = \frac{L}{2} \sum_{j=1}^n W_j \left[\frac{1}{2} \left(1 + \xi_j \right) \sum_{i=1}^n W_i f \left(\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} (1 + \xi_j) \right) (1 + \xi_i) \right) \right] \quad (16)$$

โดยจุดเกาส์ ξ_i และ ξ_j คือค่าของพิกัด ณ จุดหนึ่งในองค์ประกอบเส้นและค่าคงที่ W_i และ W_j คือน้ำหนักที่เหมาะสมกับ ξ_i และ ξ_j ตามลำดับ

ตามหลักพลังงานเสมือนและฟังก์ชันพลังงานจากพลังงานความเครียดสามารถเขียนสมการในสภาวะสมดุล ($\delta\pi = 0$)

การหาค่าตอบของระบบสมการไม่เชิงเส้นนิวตัน-ราฟสันได้กำหนดสมการเป็น

$$[K_{NL}]_i \{\Delta q\}_{i+1} = -\{R\}_i \quad (17)$$

เมทริกซ์ $[K_{NL}]_i$ คือส่วนประกอบสตีเฟนชันส่วนย่อยของเมทริกซ์ $\left\{ \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_i \partial q_j} \right\}$ จากองค์ประกอบทั้งหมด เวกเตอร์ $\{R\}_i$ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์องค์ประกอบ $\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial q} \right\}$ และ $\{\Delta q\}_{i+1}$ คือการกระจัดที่โนดของเวกเตอร์ที่เพิ่มขึ้น

การแก้ปัญหของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iterative method) เพื่อหาผลลัพธ์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $\{q_o\} = 0$
2. คำนวณค่าเมทริกซ์ $[K_{NL}]$ และเวกเตอร์ $\{R\}_i$
3. คำนวณค่า $\{\Delta q\}$
4. คำนวณค่า $\{q\}$
5. ทำซ้ำที่ข้อ 2 จนกระทั่งได้ค่า $\{\Delta q\} \leq 10^{-6}$

4. เปรียบวิธีการยิงเป้า

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลขของการศึกษานี้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้นจึงตรวจสอบความถูกต้องโดยระเบียบวิธีการยิงเป้า ซึ่งจะใช้กับปัญหาของการโก่งตัวขนาดใหญ่และการวิเคราะห์หลังคลอด วิธีนี้ใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีเงื่อนไขขอบเขต

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตและสมการสมดุลของชิ้นส่วนเล็ก ds พิจารณาได้จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ตามลำดับและแสดงไว้ในสมการ (18ก-18ฉ) พร้อมกับค่าเงื่อนไขขอบเขตที่จุด A และจุด B ตามสมการ (19) และ (20) ในรูปแบบตัวแปรไร้มิติ มีดังนี้

$$\frac{d\hat{x}}{ds^*} = \cos\theta \quad (18ก)$$

$$\frac{d\hat{y}}{ds^*} = \sin\theta \quad (18ข)$$

$$\frac{d\hat{M}}{ds^*} = \hat{Q} \quad (18ค)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{ds^*} = -\hat{M} \quad (18ง)$$

$$\frac{d\hat{Q}}{ds^*} = -\hat{T}\theta' - \hat{H}\theta' - \hat{w}\sin\theta \quad (18จ)$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds^*} = \hat{Q}\theta' + \hat{w}\sin\theta \quad (18ฉ)$$

การกำหนดค่าตัวแปรคงที่และโมเมนต์ของแท่งนาโนยื่นภายใต้การรับน้ำหนักตนเองตามรูปที่ 1 และรูปที่ 2 กำหนดเงื่อนไขที่จุดรองรับ A ดังนี้

$$s^* = 0, \hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \theta = \theta_A, \hat{M} = M_A, \hat{Q} = \hat{Q}_A, \hat{T} = 0 \quad (19)$$

และที่จุด B ได้แก่

$$s^* = 1, \hat{x} = \hat{x}_B, \hat{y} = \hat{y}_B, \theta = \theta_B, \hat{M} = M_B, \hat{Q} = \hat{Q}_B, \hat{T} = 0 \quad (20)$$

ตัวแปรของรูปแบบที่ไร้มิติ นิยามไว้ดังนี้

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y}{L}, s^* = \frac{s}{s_t}, \hat{M} = \frac{(M^*)L}{K}, \hat{Q} = \frac{QL^2}{K}, \hat{T} = \frac{TL^2}{K}, \hat{H} = \frac{HL^2}{K} \text{ and } \hat{w} = \frac{wL^3}{K} \quad (21)$$

จากชุดสมการเชิงอนุพันธ์ตามที่กำหนดเงื่อนไขขอบเขต การหาผลลัพธ์จะมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่า \hat{w}, \hat{H} , คาคคเนค่า $\theta_B, \hat{x}_B, \hat{y}_B$ สำหรับการคำนวณผลลัพธ์ครั้งแรก

- อินทิเกรตสมการ (18ก)-(18ฉ) จาก $s^* = 1$ to $s^* = 0$ โดยใช้วิธีการระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา อันดับสี่ (the fourth-order Runge-Kutta algorithm) ด้วยการควบคุมขนาดขั้นตอนที่ปรับได้
- คำนวณค่าที่ต้องการของ Φ เท้ากับศูนย์ในสมการ

$$\text{Minimize}_{x_B, \hat{H}, \theta_B} \Phi = |\hat{x}(0)| + |\hat{y}(0)| + |\theta(0) - \theta_A| \quad (22)$$

5. วิเคราะห์ผล

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองสมการทางคณิตศาสตร์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงตรวจสอบความถูกต้องโดยเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวมากของแท่งนาโนยื่นภายใต้การรับน้ำหนักตัวเองจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 40 กับผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธียิงเป้า

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่ามุมการโก่งตัวมากของแท่งนาโนยื่นภายใต้การรับน้ำหนักตัวเองโดยแสดงผลกระทบจากแรงตึงผิวด้วยวิธี FEM และ SM

\hat{w}	\hat{H}	θ_B (degree)	
		FEM	SM
8	0	24.2946	24.2922
9	0	62.1616	62.1616
10	0	81.4401	81.4403
11	0	94.8948	94.8952
12	0	105.1698	105.1702
13	0	113.3937	113.3942
8	0.1	0	0
9	0.1	53.0989	53.3297
10	0.1	74.9456	75.2257
11	0.1	89.5282	89.8189
12	0.1	100.4713	100.7573
13	0.1	109.1491	109.4231
8	0.2	0	0
9	0.2	42.6017	42.9660
10	0.2	68.1133	68.6118
11	0.2	84.0370	84.5693
12	0.2	95.7261	96.2556
13	0.2	104.8940	105.4047
8	0.3	0	0
9	0.3	29.1222	29.4902
10	0.3	60.8127	61.4676
11	0.3	78.3827	79.1103
12	0.3	90.9166	91.6514
13	0.3	100.6185	101.3322
8	0.4	0	0
9	0.4	0	0

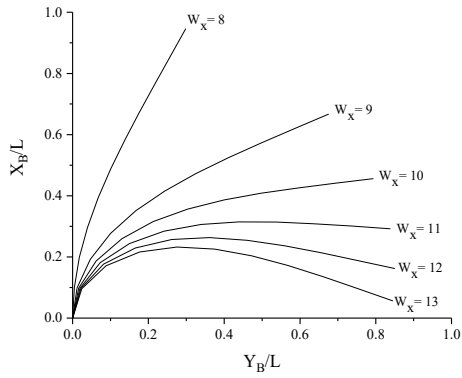
\hat{w}	\hat{H}	θ_B (degree)	
		FEM	SM
10	0.4	52.8322	53.5777
11	0.4	72.5147	73.3932
12	0.4	86.0222	86.9263
13	0.4	96.3114	97.1976

FEM, finite element method; SM, shooting method; \hat{H} , surface stress; \hat{w} , self-weight; θ_B , end rotation

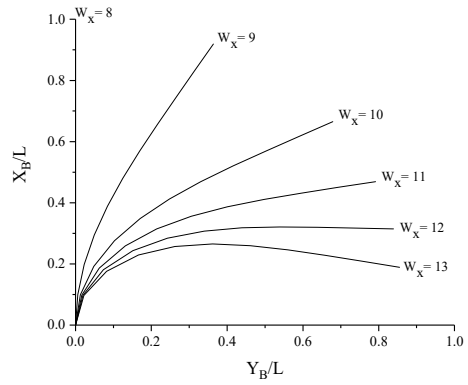
ตารางที่ 2 เปรียบเทียบการโก่งตัวมากในแนวตั้งและแนวนอนของแท่งนาโนยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองโดยแสดงผลกระทบจากแรงตึงผิวด้วยวิธี FEM และ SM

\hat{w}	\hat{H}	x_B/L		y_B/L	
		FEM	SM	FEM	SM
8	0	0.9460	0.9460	0.2982	0.2982
9	0	0.6669	0.6669	0.6750	0.6750
10	0	0.4560	0.4560	0.7930	0.7930
11	0	0.2922	0.2922	0.8377	0.8377
12	0	0.1621	0.1621	0.8495	0.8495
13	0	0.0568	0.0568	0.8446	0.8446
8	0.1	1.0000	1.0000	0	0
9	0.1	0.7503	0.7482	0.6027	0.6049
10	0.1	0.5269	0.5235	0.7630	0.7648
11	0.1	0.3533	0.3493	0.8265	0.8277
12	0.1	0.2153	0.2111	0.8489	0.8495
13	0.1	0.1036	0.0994	0.8504	0.8506
8	0.2	1.0000	1.0000	0	0
9	0.2	0.8350	0.8322	0.5046	0.5084
10	0.2	0.5989	0.5932	0.7237	0.7275
11	0.2	0.4154	0.4083	0.8099	0.8126
12	0.2	0.2695	0.2619	0.8444	0.8460
13	0.2	0.1513	0.1435	0.8534	0.8540
8	0.3	1.0000	1.0000	0	0
9	0.3	0.9209	0.9189	0.3594	0.3637
10	0.3	0.6721	0.6652	0.6733	0.6789
11	0.3	0.4786	0.4692	0.7872	0.7916
12	0.3	0.3247	0.3142	0.8359	0.8387
13	0.3	0.1999	0.1891	0.8534	0.8549
8	0.4	1.0000	1.0000	0	0
9	0.4	1.0000	1.0000	0	0
10	0.4	0.7463	0.7393	0.6085	0.6157
11	0.4	0.5428	0.5320	0.7578	0.7639
12	0.4	0.3807	0.3682	0.8231	0.8274
13	0.4	0.2494	0.2361	0.8502	0.8527

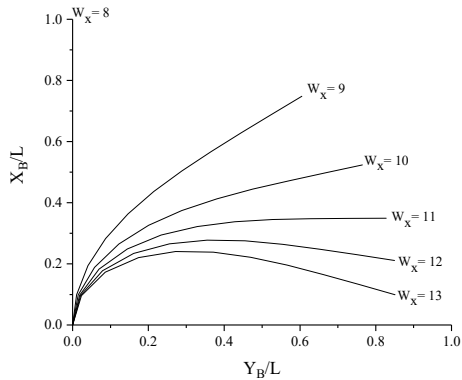
FEM, finite element method; SM, shooting method; \hat{H} , surface stress; \hat{w} , self-weight; x_B/L , horizontal deflection; y_B/L , vertical deflection



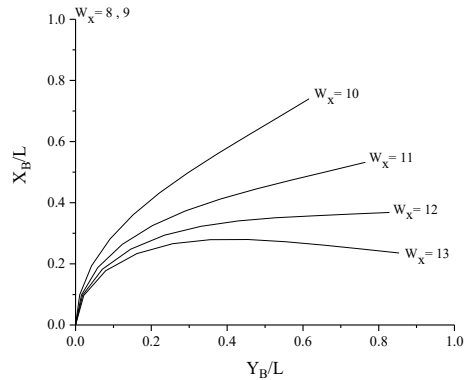
รูปที่ 3 แสดงค่าการโก่งตัวของแท่งคานยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองตั้งแต่ $\hat{W}_x = 8$ ถึง $\hat{W}_x = 13$ โดยไม่คิดผลกระทบจากแรงดิ่งผิว



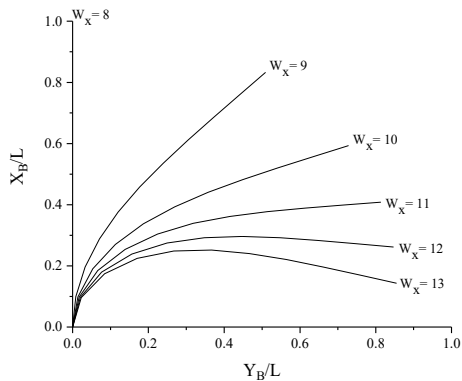
รูปที่ 6 แสดงค่าการโก่งตัวของแท่งคานยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองตั้งแต่ $\hat{W}_x = 8$ ถึง $\hat{W}_x = 13$ โดยได้รับผลกระทบจากแรงดิ่งผิว $\hat{H} = 0.3$



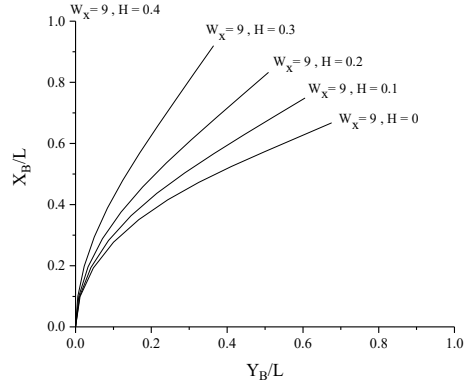
รูปที่ 4 แสดงค่าการโก่งตัวของแท่งคานยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองตั้งแต่ $\hat{W}_x = 8$ ถึง $\hat{W}_x = 13$ โดยได้รับผลกระทบจากแรงดิ่งผิว $\hat{H} = 0.1$



รูปที่ 7 แสดงค่าการโก่งตัวของแท่งคานยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองตั้งแต่ $\hat{W}_x = 8$ ถึง $\hat{W}_x = 13$ โดยได้รับผลกระทบจากแรงดิ่งผิว $\hat{H} = 0.4$



รูปที่ 5 แสดงค่าการโก่งตัวของแท่งคานยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองตั้งแต่ $\hat{W}_x = 8$ ถึง $\hat{W}_x = 13$ โดยได้รับผลกระทบจากแรงดิ่งผิว $\hat{H} = 0.2$



รูปที่ 8 แสดงค่าการโก่งตัวของแท่งคานยื่นภายใต้การรับน้ำหนักของตัวเองที่ $\hat{W}_x = 9$ โดยเปรียบเทียบการได้รับผลกระทบจากแรงดิ่งผิวตั้งแต่ $\hat{H} = 0$ ถึง $\hat{H} = 0.4$

จากปัญหาผลกระทบจากแรงดึงผิวที่มีผลต่อการโก่งตัวของแท่งนาโนยีน ตารางที่ 1 และ 2 แสดงค่ามุมการโก่งตัว θ_B , การโก่งตัวตามแนวนอน x_B/L , การโก่งตัวตามแนวตั้ง y_B/L ที่ได้รับโดยวิธี FEM สร้างเป็นแบบจำลองการโก่งตัวตามระบบพิกัดอินทรีนสิกได้ค่าใกล้เคียงวิธี SM จากรูปที่ 3-7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการรับน้ำหนักตัวเองตั้งแต่ $\hat{W}_x=8$ ถึง $\hat{W}_x=13$ และค่ามุมการโก่งตัว θ_B โดยเปลี่ยนค่าแรงดึงผิวตั้งแต่ $\hat{H}=0$ ถึง $\hat{H}=0.4$ จะเห็นได้ว่าค่ามุมการโก่งตัว θ_B มีค่าลดลงด้วยการเพิ่มขึ้นของค่าแรงดึงผิว \hat{H} ดังรูปตามลำดับ เพื่อแสดงให้เห็นผลลัพธ์ที่ชัดเจนของผลกระทบจากแรงดึงผิว \hat{H} จึงนำเสนอรูปที่ 8 กำหนดให้ $\hat{W}_x=9$ โดยเปรียบเทียบผลกระทบจากแรงดึงผิวเมื่อเพิ่มค่าตั้งแต่ $\hat{H}=0$ ถึง $\hat{H}=0.4$ ผลลัพธ์จากค่ามุมการโก่งตัวมีค่า $\theta_B=62.1616$ ที่ $\hat{H}=0$ และลดลงจน θ_B เข้าใกล้ 0 ที่ $\hat{H}=0.4$ อ้างอิงตามตารางที่ 1 ทั้งวิธี FEM และ SM ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของ 2 วิธีข้างต้นให้ค่ามุมการโก่งตัว θ_B ลดลงชัดเจนเป็นแนวทางเดียวกันแสดงให้เห็นว่าในงานวิจัยนี้เชื่อถือได้

6. บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวมากของแท่งนาโนยีนภายใต้การรับน้ำหนักบรรทุกของตัวเอง ระบบพิกัดอินทรีนสิกไฟไนต์เอลิเมนต์ได้นำมาใช้ในแบบจำลองเพื่อคำตอบแบบไม่เป็นเชิงเส้น สมการเกี่ยวข้องกับพลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการตัดรวมถึงแรงดึงผิวและงานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักบรรทุกของตัวเองได้ถูกพัฒนาขึ้น กระบวนการเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นและระเบียบวิธีอิงป่าได้นำมาใช้เพื่อหาค่าการโก่งตัวของแท่งนาโน ผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี จากการศึกษาที่แสดงให้เห็นว่าผลกระทบจากแรงดึงผิวมีผลทำให้ค่าของการโก่งตัวลดลง

7. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนงบประมาณวิจัยจากภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

8. การอ้างอิง

- [1] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1982). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, Singapore.
- [2] Frisch-Fay, R. (1962) *Flexible Bars*. Butterworth, London, England.
- [3] Wang, C.M., Wang, C.Y. and Reddy J.N. (2005). *Exact solution for buckling of structural members*. CRC Press, boca Raton, Florida.

- [4] Golley, B.W. (1997) the solution of open and closed elastic using intrinsic coordinate finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 146, pp. 127-134
- [5] Ngiam, P.C.A., (1997). Intrinsic Coordinate Elements for Large Deflection of Offshore Pipelines. *The International Society of Offshore and Polar Engineers*, Vol. 11, pp. 313-314
- [6] Rao, B.N., and Rao, G.V. (1989) Large deflections of a cantilever beam subjected to a rotational distributed loading. *Forschung im Ingenieurwesen*, Bd. 55 Nr. 4. pp. 116-120
- [7] Sripirom, P. (2001) *Large Deflection of a Cantilever Beam Using Intrinsic Coordinate Finite Elements*. Master of Science Thesis, Applied Mathematics Program, King Mongkut's University of Technology Thonburi.
- [8] Eringen, A.C. (2002). *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York.
- [9] Mahasuwanchai, P. (2015) *Large Deflection of Cantilever Beam Made of Generalized Ludwick Material*. Master of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi.
- [10] Gurtin, M.E. and Murdoch, A.I. (1978) Surface stress in solids. *International Journal of Solid and Structure*, Vol. 14 pp. 431-440
- [11] Wang, J., Huang, Z., Duan, H., Yu, S., Feng, X., Wang, G., Zhang, W. and Wang. T., (2011) Surface Effect in Mechanics of Nanostructured Material. *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 24, No. 2, pp. 247-254.
- [12] Duan, W.H. and Wang, C.M. (2008) Exact solution for buckling of columns including self-weight. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 134, No. 1, pp. 116-119.
- [13] Wang, G.F. and Yang, F. (2011) Postbuckling analysis of nanowires with surface effects. *Journal of Applied Physics*, Vol. 109, No. 6, pp. 063535-1-963535-4.
- [14] Juntasaid, C., *A Variational Approach for Static Analysis of a Nanorod, using Intrinsic Coordinate Finite Elements*. Master of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi.