

อิทธิพลของคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวในตัวกลาง
ไอโซโซอิเล็กทริกสามมิติ

INFLUENCE OF PERMITTIVITY OF A MEDIUM INSIDE THE CRACK GAP ON GENERALIZED T-STRESSES OF CRACKS
IN 3D PIEZOELECTRIC MEDIA

พิทวัส เช็งมา¹, ณัฐนันท์ ชำนาญจิตร¹, วารุจ ลิ้มวิบูลย์², ปิยะฉัตร ฉัตรตันใจ¹, วีรพร พงศ์ดิณบุตร^{1,*} และ ยโสธร ทรัพย์เสถียร³

¹ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยบูรพา, จังหวัดชลบุรี, ประเทศไทย

² ภาควิชาวิศวกรรมโยธา, คณะวิศวกรรมศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, จังหวัดกรุงเทพมหานคร, ประเทศไทย

³ ภาควิชาวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยมหิดล, จังหวัดนครปฐม, ประเทศไทย

*Corresponding author address: Weeraporn@buu.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาอิทธิพลคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวที่อยู่ในระนาบและไม่อยู่ในระนาบในตัวกลางไอโซโซอิเล็กทริกเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้ และเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคลองเชิงพลังงานโดยใช้วิธีบาวตารีเอลิเมนต์ รอยร้าววงกลมและรอยร้าวผิวทรงกลมถูกเลือกเป็นตัวแทนของรอยร้าวที่อยู่ในระนาบและรอยร้าวไม่อยู่ในระนาบตามลำดับ ผลการศึกษาพบว่า คุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางที่อยู่ภายในรอยร้าวมีบทบาทที่สำคัญต่อค่าของหน่วยแรงที่ทั่วไป กล่าวคือ หน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าววงกลมภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้ และเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคลองเชิงพลังงาน อยู่ระหว่างผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านได้ซึ่งเป็นขอบเขตบน และแบบซึมผ่านไม่ได้ซึ่งเป็นขอบเขตล่าง สำหรับทุกค่าของคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางที่พิจารณา โดยเป็นที่น่าสังเกตว่า เมื่อคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวมีค่าเพิ่มขึ้น ผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคลองเชิงพลังงาน เข้าสู่ผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านได้ เร็วกว่าผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้ นอกจากนี้ เราคาดคะเนของผิวรอยร้าวที่ไม่อยู่ในระนาบยังทำให้ ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวผิวทรงกลมแตกต่างจากของรอยร้าววงกลม กล่าวคือ นอกจากผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านได้และแบบซึมผ่านไม่ได้แล้ว ผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคลองเชิงพลังงานยังเป็นขอบเขตของหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวผิวทรงกลมด้วยเช่นกัน

คำสำคัญ: เงื่อนไขผิวรอยร้าว, หน่วยแรงที่ทั่วไป, รอยร้าวไม่อยู่ในระนาบ, คุณสมบัติการนำไฟฟ้า, ตัวกลางไอโซโซอิเล็กทริก

Abstract

This paper investigates the influence of the permittivity of a medium inside the crack gap on generalized T-stresses of planar and non-planar cracks in a linear piezoelectric media under semi-permeable and energetically consistent boundary conditions by using the boundary element method. Penny-shaped planar crack and spherical cap non-planar crack are investigated in the present study. Numerical results indicate that the permittivity of a medium inside the crack gap plays an important role on the values of the generalized T-stresses. Solutions of generalized T-stresses of a penny-shaped crack with semi-permeable and energetically consistent boundary conditions lie between the permeable solution (upper bound) and the impermeable solution (lower bound) for the entire range of permittivity of a medium considered in the numerical study. It is evidently indicated from the numerical results that when the permittivity of a medium inside the crack gap increases, the energetically consistent solution approaches the permeable solution more quickly than the semi-permeable solution. In addition, the non-planar geometry of the crack surface of the spherical cap crack causes the upper and lower bounds of the generalized T-stresses to differ from those of the penny-shaped planar crack. More specifically, besides the permeable and impermeable solutions, the energetically consistent solution is the bound of the generalized T-stress for the spherical cap crack.

Keywords: Crack-face conditions, Generalized T-stress, Non-planar crack, Permittivity, Piezoelectric media

1. บทนำ

ในปัจจุบันนี้ วัสดุไพโซอิเล็กทริก (Piezoelectric materials) ถูกนำมาประยุกต์ใช้งานอย่างแพร่หลายทั้งในด้านวิศวกรรมและอุตสาหกรรมต่างๆ รวมทั้งยังสามารถพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน ยกตัวอย่างเช่น วัสดุชนิดนี้เป็นตัวให้กำเนิดเสียงในโทรศัพท์มือถือ เป็นตัวควบคุมความถี่ในเครื่องคอมพิวเตอร์ เป็นหัวพิมพ์ในเครื่องพิมพ์อิงเจ็ท เป็นหม้อแปลงไฟฟ้าในเครื่องเล่นดีวีดีแบบพกพา เป็นเซนเซอร์และแอคชูเอเตอร์ รวมทั้งยังถูกนำมาประยุกต์ใช้งานในอุปกรณ์จำพวกลำโพง หรือในอุปกรณ์ทำความสะอาด อย่างเช่น ในที่ล้างแว่น ในแปรงสีฟันที่หมุนเองได้ เป็นต้น [1]-[2] สาเหตุดังกล่าวเป็นเพราะว่าวัสดุชนิดนี้ สามารถเปลี่ยนพลังงานกลให้เป็นพลังงานไฟฟ้า และในทางกลับกัน วัสดุชนิดนี้ยังสามารถเปลี่ยนพลังงานไฟฟ้าให้กลับมาเป็นพลังงานกลได้อีกด้วย อย่างไรก็ตาม ข้อเสียสำคัญของวัสดุไพโซอิเล็กทริก คือ มีความเปราะและมีโอกาสเกิดการแตกร้าวได้ง่ายทั้งในระหว่างกระบวนการผลิตและระหว่างการใช้งาน รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นจะทำให้เกิดหน่วยแรงที่มีความเข้มข้นสูงภายในเนื้อวัสดุ ซึ่งอาจส่งผลให้วัสดุไพโซอิเล็กทริกเกิดความเสียหายจนทำให้อุปกรณ์ที่มีชิ้นส่วนไพโซอิเล็กทริกประกอบอยู่ภายในไม่อาจใช้งานได้อีกต่อไป ด้วยเหตุนี้ ความรู้ความเข้าใจต่อพฤติกรรมและการแตกร้าวในวัสดุไพโซอิเล็กทริกจึงเป็นสิ่งที่สำคัญและไม่อาจหลีกเลี่ยงได้

หน่วยแรงที่ทั่วไป (generalized T-stress) เป็นพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญในการอธิบายพฤติกรรมบริเวณขอบรอยร้าวของวัสดุไพโซอิเล็กทริก [3]-[4] อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์หน่วยแรงที่ทั่วไปด้วยระเบียบวิธีวิจัยเชิงตัวเลขเป็นสิ่งที่ไม่ง่ายนัก เนื่องจาก เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้า (Electrical boundary conditions) ที่นำมาใช้วิเคราะห์รอยร้าวในวัสดุไพโซอิเล็กทริก เพราะพฤติกรรมและการแตกร้าวของวัสดุชนิดนี้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าเป็นสำคัญ ซึ่งถ้าเลือกใช้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าที่ต่างกัน หน่วยแรงที่ทั่วไปของวัสดุชนิดนี้ก็จะแตกต่างกันไปด้วย ในปัจจุบันมีเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าหลายประเภท ยกตัวอย่างเช่น เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านได้ (permeable) ที่เสนอโดย Parton [5] แบบซึมผ่านไม่ได้ (impermeable) ที่เสนอโดย Deeg [6] แบบกึ่งซึมผ่าน (semi-permeable) ที่เสนอโดย Hao และ Shen [7] และแบบสอดคล้องเชิงพลังงานที่เสนอโดย Landis [8] ซึ่งแต่ละประเภทก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไป [9]

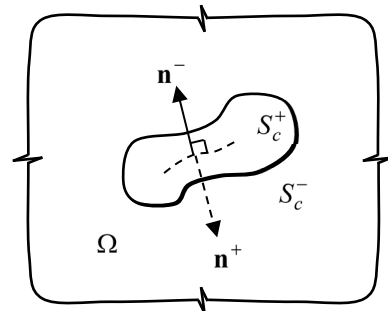
อย่างไรก็ตาม งานวิจัยส่วนใหญ่มุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์ปัญหา รอยร้าว 2 มิติ [10]-[14] ในขณะที่มีงานวิจัยเพียงไม่กี่ชิ้นที่ตีพิมพ์เกี่ยวกับการวิเคราะห์ค่าหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าว 3 มิติ ยกตัวอย่างเช่น Subsathaphol [3] ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์คำนวณค่าหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวรูปทรงเรขาคณิตใดๆ (ทั้งที่อยู่ในระนาบและไม่อยู่ในระนาบ) ในตัวกลางไพโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต

แต่วิธีของ Subsathaphol [3] จำกัดอยู่เฉพาะเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านไม่ได้เพียงประเภทเดียวเท่านั้น ทำให้ไม่สามารถศึกษาผลกระทบของค่าการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไปได้ ต่อมา Pich [15] นำเสนอผลเฉลยแบบเปิดของหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าววงกลมในตัวกลางทรานเวอร์สลิย์ไอโซทรอปิกไพโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต ภายใต้เงื่อนไขที่ผิวรอยร้าวแบบต่างๆ นอกจากนี้ Pich [15] ยังแสดงให้เห็นถึงผลกระทบของค่าการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไป อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดของ Pich [15] คือศึกษาเฉพาะรอยร้าววงกลมเพียงชนิดเดียวเท่านั้น ทั้งยังเป็นรอยร้าวที่อยู่ในระนาบอีกด้วย ค่าตามที่ได้มาคือ ค่าการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่ไม่อยู่ในระนาบ จะส่งผลต่อหน่วยแรงที่ทั่วไปอย่างไร จะมีความเหมือนหรือต่างกับรอยร้าวที่อยู่ในระนาบหรือไม่ ยังคงเป็นคำถามที่นักวิจัยให้ความสนใจอยู่ เมื่อไม่นานมานี้ Limwibul [16] ประสบความสำเร็จในการพัฒนาต่อยอดงานวิจัยของ Subsathaphol [3] ทำให้สามารถคำนวณค่าหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวรูปทรงเรขาคณิตใดๆ ในตัวกลางไพโซอิเล็กทริกสามมิติภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าประเภทต่างๆ อาทิเช่น แบบซึมผ่านได้ แบบซึมผ่านไม่ได้ แบบกึ่งซึมผ่าน และ แบบสอดคล้องเชิงพลังงาน อย่างไรก็ตาม Limwibul [16] ยังไม่ได้ศึกษาผลกระทบของค่าการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไป ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าประเภทต่างๆ

บทความนี้ นำเสนออิทธิพลคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่อยู่ในระนาบและไม่อยู่ในระนาบต่อหน่วยแรงที่ทั่วไป ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้และเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน ด้วยวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่พัฒนาโดย Limwibul [16]

2. รายละเอียดประกอบปัญหา (PROBLEM DESCRIPTION)

พิจารณารอยร้าวรูปทรงเรขาคณิตใดๆ ในตัวกลางไพโซอิเล็กทริกเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีคุณสมบัติแอนไอโซทรอปิกทั่วไปในโดเมน Ω ดังรูปที่ 1 รอยร้าวประกอบด้วยรอยร้าวผิวบน (S_c^+) และรอยร้าวผิวล่าง (S_c^-) โดยมีเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยพุ่งออกจากผิวบน (\mathbf{n}^+) และผิวล่าง (\mathbf{n}^-) ของรอยร้าวตามลำดับ



รูปที่ 1 รอยร้าวในตัวกลางไพโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต

ตัวกลางโพซิโวลีกริก (ซึ่งสมมติว่าไม่มีแรงวัตถุ (body force) และประจุไฟฟ้าวัตถุ (body electric charge)) ถูกแรงเชิงกลและแรงเชิงไฟฟ้า (mechanical and electrical loadings) กระทำที่ผิวของรอยร้าว (crack surface) หรือที่ขอบเขตระยะไกล (remote boundary) เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ในการศึกษาครั้งนี้ เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าที่ผิวรอยร้าวคือ แบบกึ่งซึมผ่าน และแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน โดยทราบค่าคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าว (ϵ_c)

3. สมการพื้นฐาน (BASIC EQUATIONS)

สมการพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ปัญหารอยร้าวในวัสดุโพซิโวลีกริกเชิงเส้น โดยไม่คิดผลของแรงวัตถุและประจุไฟฟ้าวัตถุ ดังแสดงในสมการที่ (1)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0; \sigma_{ij} = E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (1)$$

เมื่อ σ_{ij} คือ ความเค้นทั่วไป (generalized stress) (ซึ่งก็คือความเค้น (stress) σ_{ij} และ ความเหนี่ยวนำไฟฟ้า (electric induction) σ_{i4}), u_k คือ การกระจัดทั่วไป (generalized displacement) (ซึ่งก็คือ การกระจัด (displacement) u_k และ ศักย์ไฟฟ้า (electric potential) u_4), และ E_{ijkl} คือ มอดุลัสทั่วไป (generalized moduli) (ซึ่งก็คือ ค่าคงที่อีลาสติก (elastic constants) E_{ijkl} , ค่าคงที่โพซิโวลีกริก (piezoelectric constants) E_{i4kl} , และ คุณสมบัติการนำไฟฟ้า (dielectric permittivities) $-E_{i44l}$) สำหรับแรงดูดลากทั่วไป (generalized traction) t_j ที่จุดใดๆ บนผิวรอยร้าวร่วมกับเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย \mathbf{n} สามารถคำนวณได้จากสมการ $t_j = \sigma_{ij}n_i$ (ซึ่งก็คือแรงดูดลาก (traction) $t_j = \sigma_{ij}n_i$ และ ประจุไฟฟ้าที่ผิว (surface electric charge) $t_4 = \sigma_{i4}n_i$) โดยนับจากนี้เป็นต้นไป อักษรตัวเล็กมีค่าพิสัย (range) ตั้งแต่ 1 ถึง 3 ในขณะที่อักษรตัวใหญ่มีค่าพิสัยตั้งแต่ 1 ถึง 4 และ ตัวอักษรซ้ำกัน (repeat indices) หมายถึงผลรวมตลอดพิสัยของตัวอักษรนั้น (รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถดูได้จาก Rungamornrat และ Mear [17])

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่าน แรงดูดลากที่ผิวรอยร้าว (t_i^+, t_i^-) ทราบค่า ในขณะที่ผลรวมของประจุไฟฟ้าที่ผิว (กล่าวคือ $\Sigma t_4 \equiv t_4^+ + t_4^-$) มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนผลต่างของการกระจัดทั่วไป Δu_j และประจุไฟฟ้าที่ผิว t_4^+ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และมีความสัมพันธ์กันดังสมการที่ (2)

$$t_4^+ \Delta u_i n_i^+ = -\epsilon_c \Delta u_4 \quad (2)$$

เมื่อ ϵ_c คือ คุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าว สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน แรงดูดลากที่ผิว t_i^+ และ t_i^- แยกเป็นสองส่วน คือ $t_i^+ = \sigma_i^+ + \tau_i^+$ และ

$t_i^- = \sigma_i^- + \tau_i^-$ เมื่อ $\{\sigma_i^+, \sigma_i^-\}$ และ $\{\tau_i^+, \tau_i^-\}$ คือ แรงดูดลากตั้งฉาก (normal traction) และแรงดูดลากเฉือน (shear traction) ตามลำดับ โดยที่ $\{\tau_i^+, \tau_i^-\}$ ทราบค่า ในขณะที่ผลรวมของประจุไฟฟ้าที่ผิว Σt_4 และ ผลรวมแรงดูดลากตั้งฉาก (กล่าวคือ $\Sigma \sigma_i \equiv \sigma_i^+ + \sigma_i^-$) มีค่าเท่ากับศูนย์ อย่างไรก็ตาม ผลต่างของการกระจัดทั่วไป Δu_j แรงดูดลากตั้งฉาก σ_i^+ และ ประจุไฟฟ้าที่ผิว t_4^+ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยนอกจากมีความสัมพันธ์กันตามสมการที่ (2) แล้ว ยังมีความสัมพันธ์กันดังสมการที่ (3)

$$2\sigma = \epsilon_c (\Delta u_4)^2 / (\Delta u_i n_i^+)^2 \quad (3)$$

เมื่อ $\sigma = \sigma_i^+ n_i^+$ คือ แรงดูดลากตั้งฉาก โดย ตัวยก (superscript) เครื่องหมาย “-” และ “+” คือ ปริมาณที่ผิวล่างและผิวบนของรอยร้าว ตามลำดับ (รายละเอียดเพิ่มเติมดูได้จาก [17])

4. สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต (BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS)

ปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) ของรอยร้าวในตัวกลางโพซิโวลีกริกไร้ขอบเขตถูกสร้างขึ้นในเทอมของสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตจำนวนสองสมการ คือ สมการเชิงปริพันธ์สำหรับผลรวมของการกระจัดทั่วไปที่ผิวรอยร้าว และสมการเชิงปริพันธ์สำหรับผลต่างแรงดูดลากทั่วไปที่ผิวรอยร้าว ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นโดย Rungamornrat และ Mear [17] ดังสมการที่ (4) และ (5) ตามลำดับ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{S_C^+} \tilde{t}_K(\mathbf{y}) \Sigma u_K(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{S_C^+} \tilde{t}_K(\mathbf{y}) \int_{S_C^+} U_J^K(\xi - \mathbf{y}) \Sigma t_J(\xi) dS(\xi) dS(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{S_C^+} \tilde{t}_K(\mathbf{y}) \int_{S_C^+} G_{mJ}^K(\xi - \mathbf{y}) D_m \Delta u_J(\xi) dS(\xi) dS(\mathbf{y}) \\ &- \int_{S_C^+} \tilde{t}_K(\mathbf{y}) \int_{S_C^+} H_{iJ}^K(\xi - \mathbf{y}) n_i(\xi) \Delta u_J(\xi) dS(\xi) dS(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{S_C^+} \tilde{v}_K(\mathbf{y}) \Delta t_K(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{S_C^+} D_i \tilde{v}_K(\mathbf{y}) \int_{S_C^+} C_{mJ}^{iK}(\xi - \mathbf{y}) D_m \Delta u_J(\xi) dS(\xi) dS(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{S_C^+} D_i \tilde{v}_K(\mathbf{y}) \int_{S_C^+} G_{iK}^J(\xi - \mathbf{y}) \Sigma t_J(\xi) dS(\xi) dS(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{S_C^+} \tilde{v}_K(\mathbf{y}) \int_{S_C^+} H_{iK}^J(\xi - \mathbf{y}) n_i(\mathbf{y}) \Sigma t_J(\xi) dS(\xi) dS(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5)$$

เมื่อ $D_m = n_i \varepsilon_{ism} \partial / \partial \xi_s$ คือ ตัวดำเนินการทางดิฟเฟอเรนเชียลพื้นผิว (surface differential operator), \tilde{t}_K และ \tilde{v}_K คือ ฟังก์ชันทดสอบ (sufficiently smooth test functions), ε_{ism} คือ standard alternating symbol, Σu_j และ Δu_j คือ ผลรวมและผลต่างของการกระจัดทั่วไประหว่างผิวบนและล่างของรอยร้าว, Σt_j และ Δt_j คือ ผลรวมและผลต่างของแรงฉุดลากทั่วไประหว่างผิวบนและล่างของรอยร้าว ข้อดีของสมการเชิงปริพันธ์ทั้งสองคือเคอร์เนลที่ปรากฏในสมการ $\{U_j^P, G_{mJ}^P, H_{ij}^P n_i, C_{mJ}^{tK}\}$ มีความเป็นเอกฐานอย่างอ่อน (weakly singular) นอกจากนี้สมการทั้งสองสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหารอยร้าวรูปทรงเรขาคณิตใดๆ ในวัสดุโพซิทีฟที่มีคุณสมบัติแอนไอโซทรอปิกทั่วไป ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบต่างๆ รายละเอียดของการพัฒนาสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตทั้งสองสมการนี้สามารถดูได้จาก Rungamornrat และ Mear [17]

5. วิธีการเชิงตัวเลข (NUMERICAL IMPLEMENTATIONS)

สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต (4) และ (5) ถูกดิสครีตไทซ์เซชัน (DISCRETIZATION) ด้วยวิธีการประมาณกาลเออร์คิน (GALERKIN APPROXIMATION) นำไปสู่ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น (SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATION) ดังสมการที่ (6) และ (7)

$$[\mathbf{D}][\Sigma \mathbf{U}] = [\mathbf{U} \quad \mathbf{G} + \mathbf{H}] \begin{bmatrix} \Sigma \mathbf{T} \\ \Delta \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\mathbf{C}][\Delta \mathbf{U}] = [\mathbf{G} + \mathbf{H} \quad \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \Sigma \mathbf{T} \\ \Delta \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (7)$$

เมื่อ \mathbf{C} , \mathbf{G} , \mathbf{H} และ \mathbf{U} คือเมทริกซ์ที่ได้จากการอินทิเกรตสองชั้นตามผิว (DOUBLE SURFACE INTEGRAL) ที่เกี่ยวข้องกับเคอร์เนล C_{mJ}^{tK} , G_{mJ}^P , $H_{ij}^P n_i$, และ U_j^P ตามลำดับ ส่วน \mathbf{D} และ \mathbf{D} คือเมทริกซ์ที่ได้จากการอินทิเกรตหนึ่งชั้นตามผิว (SINGLE SURFACE INTEGRAL) ในขณะที่ $\Sigma \mathbf{U}$ และ $\Delta \mathbf{U}$ คือ เวกเตอร์ผลรวมและเวกเตอร์ผลต่างของการกระจัดทั่วไปที่จุดต่อ ตามลำดับ และ $\Sigma \mathbf{T}$ และ $\Delta \mathbf{T}$ คือเวกเตอร์ผลรวมและเวกเตอร์ผลต่างของแรงฉุดลากทั่วไปที่จุดต่อ ตามลำดับ รายละเอียดการคำนวณเมทริกซ์ $\{\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{D}\}$ ดูได้จาก RUNGAMORN RAT และ คณะ [9] และ RUNGAMORN RAT และ MEAR [17]

สำหรับการคำนวณหาค่าข้อมูลที่ไม่ทราบค่าที่ผิวรอยร้าว จะเริ่มด้วยการแก้สมการที่ (7) ก่อน เพื่อคำนวณหาค่าเวกเตอร์ $\Delta \mathbf{U}$ หลังจากนั้นจึงแก้สมการที่ (6) เพื่อหาค่าเวกเตอร์ $\Sigma \mathbf{U}$ สุดท้ายจึงคำนวณหาค่าหน่วยแรงที่ทั่วไป โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ เวกเตอร์ $\Sigma \mathbf{T}$, $\Delta \mathbf{T}$ และ $\Delta \mathbf{U}$ ที่ปรากฏในสมการที่ (7) สามารถถูกแบ่งได้เป็น $\Sigma \mathbf{T} = [\Sigma \mathbf{T}^m \quad \Sigma \mathbf{T}^e]$, $\Delta \mathbf{T} = [\Delta \mathbf{T}^m \quad \Delta \mathbf{T}^e]$ และ $\Delta \mathbf{U} = [\Delta \mathbf{U}^m \quad \Delta \mathbf{U}^e]$ เมื่อตัวยก “E” และ “M” หมายถึง

ปริมาณทางไฟฟ้าและปริมาณทางกล ตามลำดับ ต่อมาเวกเตอร์ $\Delta \mathbf{T}^m$ สามารถแยกออกได้เป็น $\Delta \mathbf{T}^m = \Delta \mathbf{T}^{ms} + \Delta \mathbf{T}^{mm}$ เมื่อ $\Delta \mathbf{T}^{ms}$ และ $\Delta \mathbf{T}^{mm}$ คือเวกเตอร์องค์ประกอบของแรงฉุดลากเฉือนและแรงฉุดลากตั้งฉาก ตามลำดับ

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่าน เวกเตอร์ $\Sigma \mathbf{T}^m$ และ $\Delta \mathbf{T}^m$ ทราบค่า ในขณะที่ผลรวมของแรงฉุดลากทางไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ (กล่าวคือ $\Sigma \mathbf{T}^e = 0$) ส่วนเวกเตอร์ผลต่างการกระจัดทั่วไปที่ผิวรอยร้าว $\Delta \mathbf{U}$ และ เวกเตอร์ผลต่างแรงฉุดลากทางไฟฟ้าที่ผิวรอยร้าว $\Delta \mathbf{T}^e = 2\mathbf{T}^{e+}$ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า อย่างไรก็ตาม ระบบสมการเชิงเส้นสมการที่ (7) มีจำนวนสมการน้อยกว่าจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาชุดสมการมาเพิ่มเติม ซึ่งสามารถทำได้โดยประยุกต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted-residual methods) กับเงื่อนไขจากสมการที่ (2) ซึ่งในที่สุดแล้ว เวกเตอร์ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด (กล่าวคือ $\Delta \mathbf{U}$ และ $\Delta \mathbf{T}^e$) สามารถคำนวณหาค่าได้จากการแก้สมการที่ (7) ร่วมกับชุดสมการเพิ่มเติมดังกล่าว ด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method)

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน เวกเตอร์ $\Sigma \mathbf{T}^{ms}$ และ $\Delta \mathbf{T}^{ms}$ ทราบค่า ในขณะที่ผลรวมของแรงฉุดลากตั้งฉากและผลรวมแรงฉุดลากทางไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ (กล่าวคือ $\Sigma \mathbf{T}^{mm} = \Sigma \mathbf{T}^e = 0$) ส่วนเวกเตอร์ผลต่างการกระจัดทั่วไปที่ผิวรอยร้าว $\Delta \mathbf{U}$, เวกเตอร์ผลต่างแรงฉุดลากทางไฟฟ้าที่ผิวรอยร้าว $\Delta \mathbf{T}^e = 2\mathbf{T}^{e+}$, และเวกเตอร์ผลต่างของแรงฉุดลากตั้งฉาก $\Delta \mathbf{T}^{mm} = 2\mathbf{T}^{mm}$ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า เนื่องจากระบบสมการเชิงเส้นสมการที่ (7) มีจำนวนสมการน้อยกว่าจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จึงจำเป็นต้องหาชุดสมการมาเพิ่มเติม โดยสมการชุดแรกเหมือนกับในกรณีของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่าน ส่วนสมการชุดที่สองได้จากการใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับเงื่อนไขจากสมการที่ (3) ในที่สุดแล้ว สมการที่ (7) ร่วมกับสมการเพิ่มเติมอีกสองชุดเพียงพอที่จะแก้หาเวกเตอร์ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (กล่าวคือ $\Delta \mathbf{U}$, $\Delta \mathbf{T}^e$ และ $\Delta \mathbf{T}^{mm}$) ด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

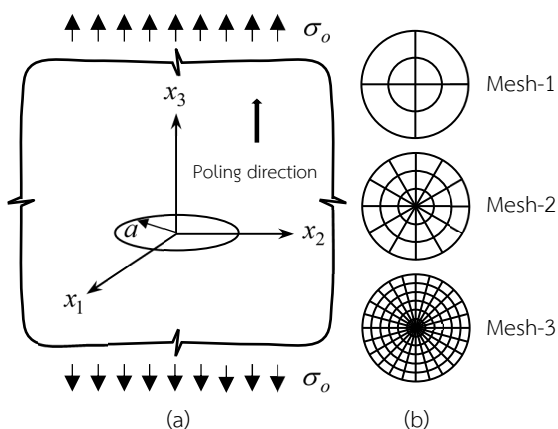
หลังจากที่เวกเตอร์ $\Delta \mathbf{U}$ ถูกคำนวณสำหรับทุกเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแล้ว เวกเตอร์ผลรวมของการกระจัดทั่วไปที่จุดต่อ $\Sigma \mathbf{U}$ ก็สามารถคำนวณได้จากการแก้สมการที่ (6) ด้วยวิธี preconditioning conjugate gradient method ซึ่งค่าดังกล่าวจะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาหน่วยแรงที่ทั่วไป (สูตรชัดเจน) สำหรับคำนวณหาหน่วยแรงที่ทั่วไปสามารถดูได้จากงานวิจัยของ Subsathaphol [3] และ Limwibul [16])

6. ผลการศึกษา (RESULTS AND DISCUSSIONS)

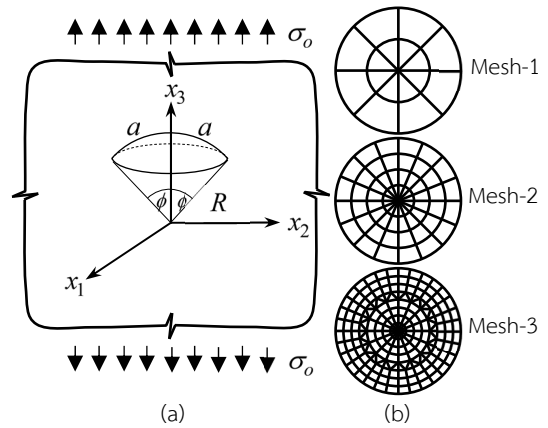
สองตัวอย่างกรณีศึกษาถูกนำเสนอในบทความนี้ กรณีศึกษาแรกต้องการทวนสอบ (verification) ความถูกต้องของระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่พัฒนาโดย Limwibul [16] ต่อมา กรณีศึกษาที่สอง จึงทำการศึกษาอิทธิพลของคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไป ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้และแบบสอดคลองเชิงพลังงาน โดยรอยร้าววงกลม (penny-shaped crack) และรอยร้าวผิวทรงกลม (spherical cap crack) ถูกเลือกเป็นตัวแทนของรอยร้าวที่อยู่ในระนาบและไม่อยู่ในระนาบ ตามลำดับ

6.1. การทวนสอบและทดสอบการลู่เข้า (VERIFICATION AND CONVERGENCE TEST)

พิจารณารอยร้าววงกลมรัศมี a และรอยร้าวผิวทรงกลมรัศมี R โดยที่ ϕ คือครึ่งหนึ่งของมุมรองรับของผิวทรงกลม (รอยร้าวผิวทรงกลมนี้ เกิดจากรอยร้าววงกลมรัศมี $a = R\phi$ ทำให้โค้งไปตามพื้นผิวของรอยร้าวผิวทรงกลมรัศมี R) ในตัวกลางทรานเวอร์สลิย์ไอโซทรอปิกโพไอโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต (transversely isotropic piezoelectric infinite medium) โดยมีแกนสมมาตรวัสดุและแกนเชิงขั้ว (the axis of material symmetry and the poling axis) ขนานกับแกน x_3 ดังรูปที่ 2(a) และ 3(a) ตามลำดับ ในการศึกษาครั้งนี้ ตัวกลางโพไอโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 [9] ถูกกระทำด้วยความเค้นดึงระยะไกลสม่ำเสมอ (uniform remote tensile stress) $\sigma_{33} = \sigma_o = 100 \text{ MPa}$ และ สนามไฟฟ้าระยะไกล (remote electric field) $E_o^\infty = 0.5 \text{ MV/m}$ ในทิศทางขนานกับแกน x_3 โดยมีอากาศ (air) อยู่ภายในรอยร้าวซึ่งมีค่าความนำไฟฟ้า $\epsilon_c = \epsilon_o = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/(Vm)}$ มุม $\phi = 45^\circ$ และแบบจำลองรอยร้าวที่ใช้ในการวิเคราะห์ แสดงดังรูปที่ 2(b) และ 3(b) ตามลำดับ



รูปที่ 2 (a) รอยร้าววงกลมในตัวกลางโพไอโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต และ (b) แบบจำลองรอยร้าวที่ใช้ในการวิเคราะห์



รูปที่ 3 (a) รอยร้าวผิวทรงกลมในตัวกลางโพไอโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต และ (b) แบบจำลองรอยร้าวที่ใช้ในการวิเคราะห์

ผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) ของหน่วยแรงที่ทั่วไป นอร์มัลไลซ์ (normalize) ด้วยผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) ซึ่งเสนอโดย Pich [15] สำหรับรอยร้าววงกลม แสดงดังตารางที่ 1 (เมื่อ $T_{11}^{ex} = T_{33}^{ex} = -125.9137 \text{ MPa}$ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้ และ $T_{11}^{ex} = T_{33}^{ex} = -125.5088 \text{ MPa}$ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคลองเชิงพลังงาน) จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี กล่าวคือ ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้จากแบบจำลองรอยร้าวทั้งสามรูปแบบ ได้แก่ Mesh-1 Mesh-2 และ Mesh-3 มีค่าคลาดเคลื่อน (error) ไม่เกิน 0.1 เปอร์เซ็นต์ โดยคำตอบที่ได้จาก Mesh-3 ซึ่งเป็นแบบที่ละเอียดที่สุด ให้ผลการคำนวณที่คลาดเคลื่อนมากที่สุด อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้จากทั้งสามรูปแบบมีความถูกต้องสูงมากและมีค่าใกล้เคียงกันมาก ซึ่งเป็นผลจากการใช้เอลิเมนต์ชนิดพิเศษที่บริเวณขอบรอยร้าว (crack front) ทำให้ถึงแม้ว่าจะใช้จำนวนเอลิเมนต์เพียงไม่กี่ชิ้น ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ก็ยังคงให้ความละเอียดถูกต้องสูง

ตารางที่ 1 นอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป $\{T_{11}, T_{33}\}$ ของรอยร้าววงกลมในตัวกลางโพไอโซอิเล็กทริกไร้ขอบเขตภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้และแบบสอดคลองเชิงพลังงาน

Mes	กึ่งซึมผ่านได้		สอดคลองเชิงพลังงาน	
	T_{11}/T_{11}^{ex}	T_{33}/T_{33}^{ex}	T_{11}/T_{11}^{ex}	T_{33}/T_{33}^{ex}
1	0.9993	0.9995	0.9993	0.9995
2	0.9994	0.9997	0.9994	0.9997
3	0.9990	0.9995	0.9990	0.9995

สำหรับรอยร้าวผิวทรงกลม แบบจำลองรอยร้าว Mesh-1 มีจำนวน 16 เอลิเมนต์ ในขณะที่ Mesh-2 และ Mesh-3 มีจำนวน

64 และ 208 เอลิเมนต์ ตามลำดับ เนื่องจากในกรณีนี้ไม่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มาเปรียบเทียบ ผลเฉลยเชิงตัวเลขจึงถูกนอร์มัลไลซ์ด้วยผลการคำนวณจาก Mesh-3 ซึ่งมีจำนวนเอลิเมนต์มากที่สุด แสดงดังตารางที่ 2 และ 3 จะเห็นได้ว่า หน่วยแรงที่ทั่วไปที่คำนวณมาจาก Mesh-1 และ Mesh-2 มีค่าใกล้เคียงกับผลการคำนวณจาก Mesh-3 โดยมีค่าคลาดเคลื่อน น้อยกว่า 0.95 เปอร์เซ็นต์ และ 0.45 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ

ตารางที่ 2 นอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป $\{T_{11}, T_{33}, T_{14}\}$ ของรอยร้าวผิวทรงกลมในตัวกลางโพธิ์โซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้

Mesh	กึ่งซึมผ่านได้		
	T_{11}/T_{11}^{ref}	T_{33}/T_{33}^{ref}	T_{14}/T_{14}^{ref}
1	1.0092	0.9961	1.0064
2	1.0044	0.9983	1.0022
3	1.0000	1.0000	1.0000

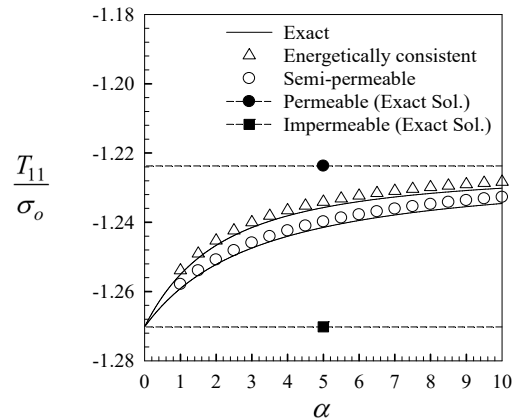
ตารางที่ 3 นอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป $\{T_{11}, T_{33}, T_{14}\}$ ของรอยร้าวผิวทรงกลมในตัวกลางโพธิ์โซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน

Mesh	สอดคล้องเชิงพลังงาน		
	T_{11}/T_{11}^{ref}	T_{33}/T_{33}^{ref}	T_{14}/T_{14}^{ref}
1	1.0067	0.9974	1.0047
2	1.0037	0.9987	1.0017
3	1.0000	1.0000	1.0000

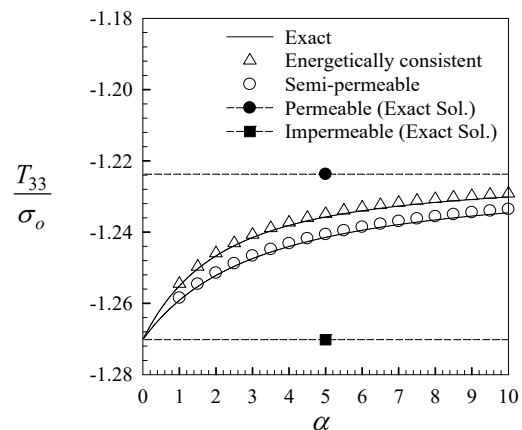
6.2. อิทธิพลของคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลาง (INFLUENCE OF PERMITTIVITY OF MEDIUM)

ในการศึกษาอิทธิพลคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวทรงกลมและรอยร้าวผิวทรงกลมต่อหน่วยแรงที่ทั่วไป ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่านได้ และแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน พารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณมีดังต่อไปนี้ (1) คุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอยร้าวถูกนิยาม (define) โดย $\epsilon_c = \alpha \epsilon_o$ เมื่อ α คือ คุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ (relative permittivity) ที่แปรผันได้ และ $\epsilon_o = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}/(\text{Vm})$ คือคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของอากาศ (2) ครึ่งหนึ่งของมุมรอบของผิวทรงกลม $\phi = 45^\circ$ (3) ตัวกลางโพธิ์โซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ถูกกระทำด้วยความเค้นดึงระยะไกลสม่ำเสมอ $\sigma_{33}^\infty = \sigma_o = 100 \text{ MPa}$ และสนามไฟฟ้าระยะไกล $E_o^\infty = 0.5 \text{ MV/m}$ (4) เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านไม่ได้ และแบบซึมผ่านได้ ถูกนำมาพิจารณาในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เพื่อเป็นตัวแทนในกรณีนี้ที่ $\alpha = 0$ และ $\alpha = \infty$ ตามลำดับ (5) เฉพาะ Mesh-3 ซึ่งมีจำนวนเอลิเมนต์มากที่สุด ของแต่ละรอยร้าว

ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} กับคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α ของตัวกลางภายในรอยร้าวสำหรับรอยร้าวทรงกลมในตัวกลางโพธิ์โซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต

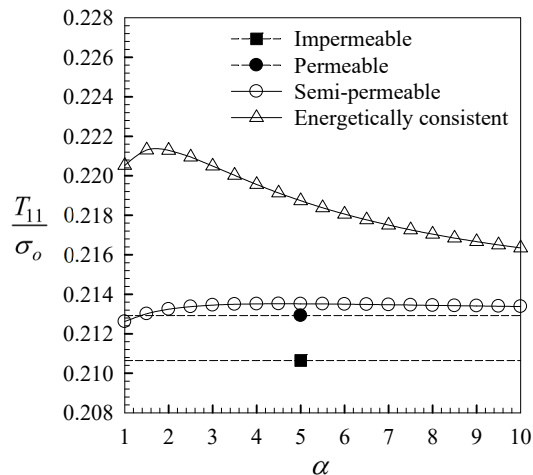


รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป T_{33} กับคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α ของตัวกลางภายในรอยร้าวสำหรับรอยร้าวทรงกลมในตัวกลางโพธิ์โซอิเล็กทริกไร้ขอบเขต

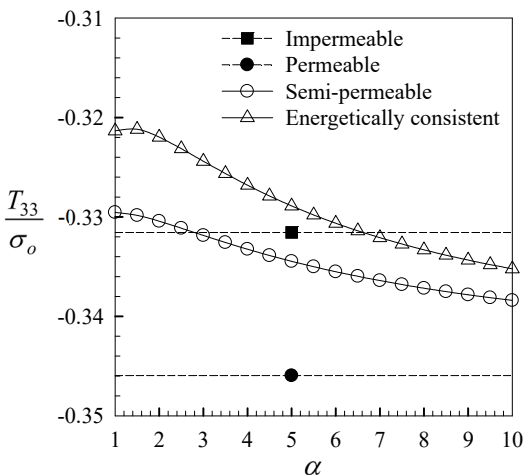
ค่านอร์มัลไลซ์ของหน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} และ T_{33} พร้อมด้วยผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ [15] สำหรับรอยร้าวทรงกลม ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าประเภทต่างๆ แสดงดังรูปที่ 4 และ 5 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเงื่อนไขแบบกึ่งซึมผ่านได้และแบบสอดคล้องเชิงพลังงานมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างยิ่ง และเป็นที่น่าสังเกตว่า ค่าหน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} และ T_{33} มีค่าเท่ากัน นอกจากนี้จากรูปที่ 4 และ 5 จะเห็นว่า หน่วยแรงที่ทั่วไปของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซึมผ่านได้เป็นขอบเขตบน ในขณะที่หน่วยแรงที่ทั่วไปของเงื่อนไขแบบซึมผ่านไม่ได้เป็นขอบเขตล่าง และเมื่อคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลาง

ภายในรอยร้าวมีค่าเพิ่มขึ้น หน่วยแรงที่ทั่วไปของเงื่อนไขแบบ สอดคล้องเชิงพลังงานเข้าสู่ผลเฉลยของเงื่อนไขแบบซึมผ่านได้ เร็วกว่าผลเฉลยของเงื่อนไขแบบกึ่งซึมผ่านได้

สำหรับอิทธิพลคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลางภายในรอย ร้าวผิวทรงกลม (ซึ่งเป็นตัวแทนของรอยร้าวที่ไม่อยู่ในระนาบ) ต่อ หน่วยแรงที่ทั่วไป $\{T_{11}, T_{33}, T_{14}\}$ แสดงดังรูปที่ 6-8 ตามลำดับ จะ เห็นได้ว่า ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของหน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} , T_{33} และ T_{14} แตกต่างกันอย่างชัดเจน

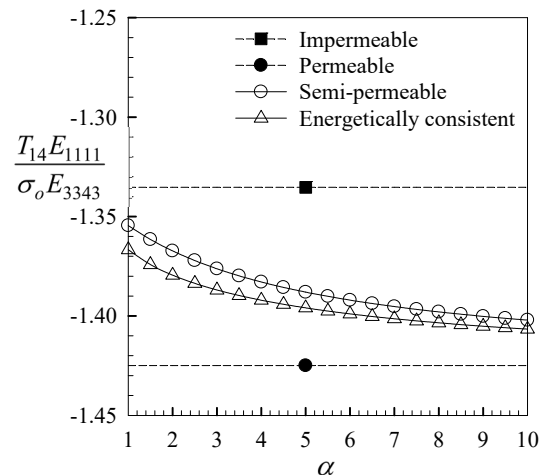


รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} กับคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α ของตัวกลาง ภายในรอยร้าวสำหรับรอยร้าวผิวทรงกลมในตัวกลาง โพลีเอทิลีนทริกไร์ขอบเขต



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป T_{33} กับคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α ของ ตัวกลางภายในรอยร้าวสำหรับรอยร้าวผิวทรงกลมใน ตัวกลางโพลีเอทิลีนทริกไร์ขอบเขต

กล่าวคือ สำหรับหน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} รูปที่ 6 แสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน และแบบซึมผ่านไม่ได้ คือขอบเขตบนและขอบเขตล่างของเงื่อนไข แบบกึ่งซึมผ่านและแบบซึมผ่านได้ อย่างไรก็ตาม สำหรับหน่วยแรง ที่ทั่วไป T_{33} จากรูปที่ 7 จะเห็นได้ว่า ขอบเขตล่างคือผลเฉลยของ เงื่อนไขกึ่งซึมผ่านได้ ในขณะที่ขอบเขตบนเกิดการสลับกันระหว่างผล เฉลยของเงื่อนไขแบบสอดคล้องเชิงพลังงานไปเป็นผลเฉลยของ เงื่อนไขแบบซึมผ่านไม่ได้ เมื่อค่าคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α มีค่าเพิ่มขึ้น



รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์มัลไลซ์หน่วยแรงที่ทั่วไป T_{14} กับคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α ของ ตัวกลางภายในรอยร้าวสำหรับรอยร้าวผิวทรงกลมใน ตัวกลางโพลีเอทิลีนทริกไร์ขอบเขต

อย่างไรก็ตาม เป็นที่น่าสังเกตว่า ไม่เหมือนกับในกรณีของ หน่วยแรงที่ทั่วไป T_{11} และ T_{33} รูปที่ 8 แสดงให้เห็นว่า ขอบเขต บนและขอบเขตล่างของหน่วยแรงที่ทั่วไป T_{14} คือ ผลเฉลยของ เงื่อนไขแบบซึมผ่านไม่ได้และแบบซึมผ่านได้ตามลำดับ และผลเฉลย ของเงื่อนไขแบบกึ่งซึมผ่านได้และแบบสอดคล้องเชิงพลังงานมีค่าอยู่ ระหว่างผลเฉลยของเงื่อนไขแบบซึมผ่านไม่ได้ (ซึ่งเป็นขอบเขตบน) และผลเฉลยของเงื่อนไขแบบซึมผ่านได้ (ซึ่งเป็นขอบเขตล่าง) โดย เมื่อค่าคุณสมบัติการนำไฟฟ้าสัมพัทธ์ α มีค่าเพิ่มขึ้น ผลเฉลยของ เงื่อนไขแบบกึ่งซึมผ่านได้และแบบสอดคล้องเชิงพลังงาน เข้าสู่ผล เฉลยของเงื่อนไขแบบซึมผ่านได้

7. บทสรุป

บทความนี้ศึกษาอิทธิพลคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของตัวกลาง ภายในรอยร้าวที่มีต่อหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าวในตัวกลางโพลี เอทิลีนทริกไร์เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบกึ่งซึมผ่าน ได้ และเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงานโดยใช้

วิธีบาวตารีเอลิเมนต์ รอยร้าววงกลมและรอยร้าวผิวทรงกลมถูกเลือกเป็นตัวแทนของรอยร้าวที่อยู่ในระนาบและรอยร้าวไม่อยู่ในระนาบตามลำดับ ผลการศึกษาพบว่า เรขาคณิตของผิวรอยร้าวที่ไม่อยู่ในระนาบทำให้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของหน่วยแรงที่ทั่วไปของรอยร้าววงกลมและรอยร้าวผิวทรงกลมแตกต่างกัน กล่าวคือ นอกเหนือจากผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบซิมผ่านได้และแบบซิมผ่านไม่ได้แล้ว ผลเฉลยของเงื่อนไขขอบเขตเชิงไฟฟ้าแบบสอดคล้องเชิงพลังงานยังเป็นขอบเขตสำหรับรอยร้าวผิวทรงกลมด้วย ซึ่งแตกต่างกับรอยร้าววงกลม ซึ่งมีเพียงผลเฉลยของเงื่อนไขแบบซิมผ่านได้และแบบซิมผ่านไม่ได้ที่เป็นขอบเขตของหน่วยแรงที่ทั่วไป

8. การอ้างอิง

- [1] Birman V., Knowles G.J., Murray J.J. (1999). Application of piezoelectric actuators to active control of composite spherical caps. *Smart Materials and Structures* **8**(2) , 218- 222. DOI: 10.1088/ 0964-1726/8/2/007
- [2] Denda M., Mansukh M. (2005). Upper and lower bounds analysis of electric induction intensity factors for multiple piezoelectric cracks by the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **29**(6) , 533-550. DOI: 10.1016/j.enganabound.2005.01.009
- [3] Subsathaphol T. (2013). *Analysis of T-stress for Cracks in 3D Linear Piezoelectric Media*. Master Thesis of Chulalongkorn University, Thailand.
- [4] Rungamornrat J. , Nguyen T. B. , Pich V. C. , Phongtinnaboot W. , Wijeyewickrema A. C. (2018). Generalized T- stress solutions for penny- shaped cracks in transversely isotropic piezoelectric media. *Engineering Fracture Mechanics* **192**, 225- 241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.01.020.
- [5] Parton V. Z. (1976) . Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronautica* **3**(9- 10), 671-683. DOI: 10.1016/0094-5765(76)90105-3
- [6] Deeg W.F. (1980). The analysis of dislocation, crack and inclusion problem in piezoelectric solids. Ph.D. Dissertation of Stanford University, United States.
- [7] Hao T.H., Shen Z.Y. (1994). A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Engineering Fracture Mechanics* **47**(6), 793-802. DOI: 10.1016/0013-7944(94)90059-0
- [8] Landis C.M. (2004). Energetically consistent boundary conditions for electromechanical fracture. *International Journal of Solids and Structures* **41**(22-23), 6291-6315. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.05. 062
- [9] Rungamornrat J. , Phongtinnaboot W. , Wijeyewickrema A.C. (2015). Analysis of cracks in 3D piezoelectric media with various electrical boundary conditions. *International Journal of Fracture* **192**, 133–153. DOI: 10.1007/s10704-015-9991-7
- [10] Zhu T., Yang W. (1999). Crack kinking in a piezoelectric solid. *International Journal of Solids and Structures* **36**(33) , 5013- 5027. DOI: 10. 1016/ S0020-7683(98)00238-8
- [11] Hao M., Biao W. (2004). T-stress in piezoelectric solid. *Applied Mathematics and Mechanics* **25**(5), 513-517. DOI: 10.1007/BF02437599
- [12] Li X.F., Lee K.Y. (2004). Crack growth in a piezoelectric material with a Griffith crack perpendicular to the poling axis. *Philosophical Magazine* **84**(18) , 1789-1820. DOI: 10.1080/14786430410001663222
- [13] Viola E., Boldrini C., Tornabene F. (2008). Non-singular term effect on the fracture quantities of a crack in a piezoelectric medium. *Engineering Fracture Mechanics* **75**(15) , 4542- 4567. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2008.04.015
- [14] Liu S., Shen Y., Liu J. (2012). Exact solutions for piezoelectric materials with an elliptic hole or a crack under uniform internal pressure. *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **25**(4) , 845- 852. DOI: 10.3901/CJME.2012.04.845
- [15] Pich V.C. (2015). Analytical Solutions of Generalized T-stress in Linear Piezoelectric Media under Various Crack- face Conditions. Master Thesis of Chulalongkorn University, Thailand.
- [16] Limwibul V. (2015). Analysis of Generalized T-stress for Cracks in 3D Linear Piezoelectric Media under Various Crack-face Conditions by BEM. Master Thesis of Chulalongkorn University, Thailand.
- [17] Rungamornrat J. , Mear M. E. (2008). Analysis of fractures in 3D piezoelectric media by a weakly singular integral equation method. *International*

Journal of Fracture **151**(1) , 1- 27. DOI:
10.1007/s10704-008-9242-2