

การใช้สมการการหมุนวนร่วมกับสมการการไหลแบบปั่นป่วนในการจำลองพฤติกรรมการไหลบนทางน้ำที่มีความชันสูง THE USE OF LOG-WAKE LAW AND TURBULENT EQUATION TO DESCRIBE FLOW BEHAVIOR IN STEEP SLOPE STREAM

ปนายเทพ พงศ์เจริญพิทย์^{1,*}, ดวงฤดี ไชยศักดิ์¹ และ ชัยวัฒน์ เอกวัฒน์พานิชย์¹

¹ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กรุงเทพมหานคร, ประเทศไทย

*Corresponding author address: panaitep.pong@gmail.com

บทคัดย่อ

สมการการไหลแบบหมุนวนสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในปัจจุบันได้ถูกพัฒนา และทดสอบกับข้อมูลในห้องปฏิบัติการโดยมีพื้นฐานมาจากการไหลแบบปั่นป่วนในท่อเรียบ สำหรับการศึกษานี้ได้นำสมการดังกล่าวมาพัฒนาเพื่อใช้สำหรับศึกษาการไหลในทางน้ำเปิดแบบชันชันได้ โดยที่สามารถแบ่งสมการออกเป็นสามส่วน ส่วนแรกเป็นสมการลอการิทึมซึ่งอธิบายผลที่เกิดจากความเค้นเฉือนระหว่างชั้นการไหล กำหนดค่าคงที่ของวอนคาแมนเท่ากับ 0.41 ส่วนที่สองเป็นสมการพหุนามดีกรี 3 ซึ่งอธิบายผลที่เกิดจากความเค้นเฉือนบริเวณผนัง และส่วนสุดท้ายเป็นสมการพหุนามดีกรี 4 ซึ่งอธิบายผลที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงความดันของการไหล หรือมีลักษณะคล้ายคลึงกับความเค้นเฉือนแบบไร้ผนัง โดยเสนอค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์เท่ากับ 0.126 การทดสอบใช้ข้อมูลทั้งหมด 68 ชุด มีอัตราการไหลอยู่ระหว่าง 0.0233-3.285 ลบ.ม/วินาที มีความลาดเอียงของทางน้ำอยู่ระหว่าง 14-30 องศา และมีความสูงของชันชันได้อยู่ระหว่าง 0.0380-0.610 ม. พบว่าสมการที่พัฒนาสามารถอธิบายลักษณะการไหลในทางน้ำเปิดแบบชันชันได้ดีโดยใช้ข้อจำกัดของความเร็วการไหลอยู่ในช่วง 0 ถึง 4 ม./วินาที และมีความแม่นยำลดลงเมื่อความสูงของชันชันได้มีค่าสูงขึ้น

คำสำคัญ: อากาศระบายน้ำล้นชนิดชันชันได้, การไหลแบบหมุนวน, การไหลแบบปั่นป่วน, การกระจายตัวของความเร็ว, ความหนืดของชันชันการไหลหมุนวน

Abstract

The log-wake law for turbulent current has been developed, and tested with laboratory data of turbulent flow in smooth pipes. For this study, the log-wake law equation has been developed to be used in stepped spillway. The log-wake law equation can be divided into three parts. First part, the logarithmic equation, describes the effect of shear stress between the flow layers. Von Karman constant is 0.41. The second part, the third-degree polynomial equation, describes the effect of shear stress on a wall. And the last part, the fourth-degree polynomial equation, describes the effect of changing the flow pressure distribution, which is similar to the wall-free shear stress. The Coles wake law with a constant wake strength about 0.126 was used. The test used 68 data sets, with the flow rate between 0.0233-3.285 m³/s, the spillway slope of 14-30 degrees, and the step height ranges 0.0380-0.610 m. It was found that the developed log-wake law could well characterize the flow in stepped spillway. The limitation of the equation. Is the flow velocity from 0 to 4 m/s and the accuracy decreased as the step height increased.

Keywords: Stepped spillway, Log-wake law, Turbulence flow, Velocity profiles, Eddy viscosity

1. บทนำ

สมการที่ใช้ในการอธิบายโปรไฟล์ความเร็วการไหลในปัจจุบันถูกสันนิษฐานว่าเป็นไปตามสมการลอการิทึมพื้นฐานโดยมีความสัมพันธ์โดยตรงกับผนังของการไหล [1] และยังสามารถอธิบายได้โดยใช้สมการกำลัง เนื่องจากการศึกษาโดยเปรียบเทียบระหว่างสมการลอการิทึมพื้นฐาน กับสมการกำลังโดยใช้สมการทั้งสองในการอธิบายโปรไฟล์ความเร็วการไหลของไหลแบบชันชันได้ ผลปรากฏว่าสมการลอการิทึมพื้นฐาน มีความแม่นยำกว่าสมการกำลัง [1], [2]

สมการลอการิทึมที่มีการใช้อยู่ในปัจจุบันมีพื้นฐานมาจากการไหลในท่อเรียบโดยสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B \quad (1)$$

เมื่อ u = ความเร็วการไหลตามความลึกการไหล, u_* = ความเร็วเฉือน, k = ค่าคงที่ของ von Karman, y = ความลึกการไหล, ν = ความหนืดไคเนมาติก และ B = ค่าคงที่การอินทิเกรตของการไหลซึ่งมีความสัมพันธ์กับความขรุขระของท้องน้ำ

ต่อมาได้มีการพัฒนาสมการพื้นฐานลอการิทึมให้มีความเหมาะสมกับการไหลจริงมากขึ้น โดยที่สมมติให้การไหลได้รับอิทธิพลจากตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหลแบบหมุนวนบริเวณผนัง [3] โดยสมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{1}{k} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B \right) + W \left(II, \frac{y}{\delta} \right) \quad (2)$$

เมื่อ II = ค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์และ

$W\left(\frac{y}{\delta}\right) =$ ฟังก์ชันของการไหลแบบหมุนวน โดยการศึกษาฟังก์ชันของการไหลแบบหมุนวน [4] สมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$W(\xi) = \frac{2H}{k} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \quad (3)$$

เมื่อ $\xi =$ อัตราส่วนระหว่างตำแหน่งที่เก็บข้อมูลกับของเขตการไหล (y/δ) ดังนั้นสมการลอการิทึมที่มีฟังก์ชันของการไหลแบบหมุนวน โดยมีพื้นฐานมาจากการไหลในท่อผิวเรียบ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{1}{k} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B\right) + \frac{2H}{k} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \quad (4)$$

สมการข้างต้นนี้เรียกว่าสมการการไหลแบบหมุนวน แต่เนื่องจากสมการข้างต้นไม่เป็นไปตามทฤษฎีการไหลในท่อผิวเรียบ และขรุขระทำให้สมการนี้ไม่สามารถใช้อธิบายการไหลภายในท่อได้อย่างครบถ้วน จึงได้มีการศึกษาและเสนอสมการที่อธิบายโปรไฟล์ความเร็วการไหลภายในท่อเรียบ [5], [6] โดยสมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{1}{k} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B\right) + \frac{2H}{k} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - \left(\frac{\xi}{k}\right) \quad (5)$$

จากนั้นได้มีการพัฒนาสมการสำหรับอธิบายการไหลในท่อ โดยทดสอบจากข้อมูลการไหลในท่อ ซึ่งวิเคราะห์อัตราส่วนระหว่างความหนืดของความปั่นป่วน และปัจจัยแรงเสียดทานของการไหล [7], [8] โดยสมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{1}{k} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B\right) + \frac{2H}{k} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - \left(\frac{\xi^3}{k}\right) \quad (6)$$

Guo and Julien [9] ได้ศึกษาการใช้สมการการไหลแบบหมุนวนสมการที่ (6) กับการไหลในท่อน้ำเปิด ที่มีตะกอนโดยใช้ข้อมูลของ Cloeman and Neil [10], Kironoto and Graf [11], Lyn [12], Sarma and Prasad [13] ในการทดสอบ

จากข้อมูลดังกล่าวพบว่ายังไม่มีการเสนอสมการสำหรับการไหลในท่อน้ำเปิดแบบชั้นบันไดที่เหมาะสมกับทฤษฎีของสมการการไหลแบบหมุนวน ดังนั้นการศึกษานี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อประยุกต์ใช้สมการการไหลแบบหมุนวนร่วมกับการไหลแบบปั่นป่วน เพื่ออธิบายการไหลในท่อน้ำเปิดแบบชั้นบันได และวิเคราะห์ข้อมูลที่มีอยู่เพื่อหาค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์ (H) ที่เหมาะสมกับการไหลในรูปแบบดังกล่าว

2. ข้อมูล และการวิเคราะห์ตัวแปรการไหล

ในการศึกษานี้ใช้ข้อมูลจากการทดลองของ Frizell [14], Ward [15], Boes and Hager [16], Hunt and Kadavy [17] และ Lueker [18] โดยแต่ละข้อมูลมี องศาของชั้นบันได และ ความสูงของชั้นบันไดที่แตกต่างกันนี้เพื่อการวิเคราะห์ที่หลากหลาย

2.1. ข้อมูลการไหลในท่อน้ำเปิดแบบชั้นบันได

Frizell [14] ศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางกายภาพ ความยาว 4.72 เมตร ความสูงรวม 2.36 เมตร และความกว้าง 0.457 เมตร โดยกำหนดมุมของรางน้ำ 26.6 องศา ความลาดเอียงของชั้นบันได คือ 0 และ 15 องศา มีความสูงของชั้นบันได คือ 5.10 เซนติเมตร ความกว้างของชั้นบันได คือ 10.20 เซนติเมตร อัตราการไหลที่ใช้ในการทดสอบเท่ากับ 0.245 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ผลการทดสอบพบว่าชั้นบันไดที่มีความลาดชัน 0 องศาสามารถสลายพลังงานได้ดีกว่าชั้นบันไดที่มีความลาดชัน 15 องศา

Ward [15] ศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางกายภาพ ความยาว 34.14 เมตร ความสูงรวม 15.24 เมตร และความกว้างของราง 1.22 เมตร โดยกำหนดมุม 26.60 องศา มีความสูงของชั้นบันได คือ 60.96 เซนติเมตร ความยาวของชั้นบันได คือ 30.48 เซนติเมตร อัตราการไหลที่ใช้ในการทดสอบอยู่ระหว่าง 0.57-3.28 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ผลการทดสอบการไหลในท่อน้ำเปิดแบบชั้นบันไดสามารถสลายพลังงานความเร็วได้ถึง 32%

Boes and Hager [16] ศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางกายภาพ ความยาว 5.7 เมตร และความกว้าง 0.5 เมตร โดยกำหนดมุม 30, 40, 50 องศา ตามลำดับ โดยมีความสูงของชั้นบันได เท่ากับ 23.10, 46.20, และ 92.40 มิลลิเมตร สำหรับความลาดเอียง 30 องศา ความสูงชั้นบันได เท่ากับ 31.10 และ 93.30 มิลลิเมตร สำหรับความลาดเอียง 50 องศา และ ความสูงของชั้นบันไดเท่ากับ 26.10 มิลลิเมตร สำหรับความลาดเอียง 40 องศา โดยอัตราการไหลในการทดลองอยู่ระหว่าง 0.023-0.19 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ผลศึกษานี้ได้เสนอสมการกำลังเพื่ออธิบายการกระจายความเร็วการไหลในท่อน้ำเปิด ซึ่งได้ผลความแม่นยำอยู่ที่ 80%

Hunt and Kadavy [17] ศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางกายภาพ ความยาว 10.82 เมตร และกว้าง 1.8 เมตร ส่วนบัน ยาว 2.44 เมตร ความสูงรวมของชั้นบันได 1.52 เมตร รวมทั้งหมด 40 ชั้น โดยบันไดแต่ละชั้น สูง 3.8 เซนติเมตร และกว้าง 15.2 เซนติเมตร ความชันของรางน้ำ 14 องศา โดยอัตราการไหลในการทดลองอยู่ระหว่าง 0.18-1.48 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที โดยมีตำแหน่งการเก็บข้อมูล ผลการทดสอบพบว่ามีการสูญเสียพลังงานจากการไหลประมาณ 30%

Lueker [18] ศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางกายภาพ ความยาว 40.2 เมตร และกว้าง 2.74 เมตร ประกอบด้วยรางน้ำที่มีความชัน 2 องศา ยาว 23.46 เมตร และชั้นบันไดยาวทั้งหมด 2.35 เมตร รวมชั้นบันไดทั้งหมด 68 ชั้น ความชันของรางน้ำ 21.8 องศา โดยอัตราการไหลในการทดลองอยู่ระหว่าง 0.19-2.56 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ผลการทดสอบ พบว่าทางระบายน้ำสามารถกระจายพลังงานได้ถึง 45%

2.2. การวิเคราะห์ตัวแปรการไหล

โดยทั่วไปการไหลในท่อน้ำเปิดแบบชั้นบันไดมีลักษณะการกระจายความเร็วของหน้าตัดการไหลตามความลึกของน้ำ ซึ่งมีลักษณะคล้ายคลึงกับสมการพาราโบลาพื้นฐาน จากข้อมูลข้างต้นสามารถจัดข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการพาราโบลาพื้นฐาน โดยกำหนดแกน x คือ

ความลึกจากชั้นบันไดจนถึงผิวน้ำ ($y + d$) และแกน y คือ ความเร็วการไหลตามความลึกการไหล (u) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$u = B_2(y + d)^2 + B_1(y + d) + C \quad (7)$$

เมื่อ C = ค่าคงที่ของสมการ ดังนั้นจากทฤษฎีที่ใช้ในการหาจุดยอด, จุดสูงสุด และ จุดต่ำสุดของสมการพาราโบลาพื้นฐานสามารถประยุกต์เพื่อใช้หาขอบเขตชั้นการไหล (δ) และความเร็วสูงสุด (u_m) โดยสมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\delta = -\frac{B_1}{2B_2} \quad (8)$$

$$u_m = C - \frac{B_1^2}{4B_2} \quad (9)$$

จากนั้นเมื่อทราบค่าขอบเขตชั้นการไหล (δ) และความเร็วสูงสุด (u_m) สามารถวิเคราะห์ตัวแปรโดยใช้สมการการไหลแบบหมุนวน โดยจัดรูปสมการที่ (6) ให้อยู่ในรูปของ Velocity-Defect Law Deviation จากการวิเคราะห์โดยใช้สมการดังกล่าวหาตัวแปรการไหล ของการไหลที่มีตะกอนซึ่งได้ค่าตัวแปรใกล้เคียงกับข้อมูลที่เก็บวัดได้จริง [9] โดยสมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{u_m - u}{u_*} = -\frac{1}{k} \ln \xi + \frac{2\Pi}{k} \cos^2 \left(\frac{\pi \xi}{2} \right) - \left(\frac{1 - \xi^3}{3k} \right) \quad (10)$$

จัดรูปสมการที่ (10) ให้อยู่ในรูปสมการลอการิทึมพื้นฐานสามารถแสดงได้ดังนี้

$$u = \frac{u_*}{k} \ln \xi + Bu_* \quad (11)$$

เมื่อ

$$Bu_* = u_m - \frac{2\Pi}{k} \cos^2 \left(\frac{\pi \xi}{2} \right) - \left(\frac{1 - \xi^3}{3k} \right) \quad (12)$$

$$Bu_* = u_m - \frac{u_*}{k} \left(2\Pi - \frac{1}{3} \right) \quad (13)$$

เมื่อ $\xi = (y + d)/\delta$ จากนั้นใช้สมการที่ (11) และสมการที่ (13) ในการหาค่าของตัวแปร u_* และ Π จากการศึกษาขอบเขตชั้นการไหลแบบปั่นป่วนแบบพื้นผิวเรียบ และแบบพื้นผิวขรุขระพบว่า $d = 0.25k_s$ [19] โดยที่ k_s = ความสูงของชั้นบันไดในทิศทางเดียวกับการไหล ($k_s = h \cos \theta$)

2.2.1. ขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลการไหลตามสมการทั้งหมดในหัวข้อ 2.2 โดยจะใช้ข้อมูลของ Frizell [14] แสดงตัวอย่างเพื่อให้เห็นขั้นตอน โดยเริ่มจากการนำข้อมูลที่ได้จากการเก็บวัดจากการทดสอบมาจัดอยู่ในรูปของตาราง แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ความเร็วการไหล u (m/s) และตำแหน่งของการเก็บวัดข้อมูล $y + d$ (m)

$y + d$ (m)	u (m/s)
0.019	2.055
0.021	2.247
0.027	2.700
0.034	3.083
0.039	3.274
0.046	3.449
0.052	3.605
0.064	4.058
0.077	4.110
0.090	4.145
0.102	4.163
0.115	4.215
0.127	4.337
0.140	4.389
0.148	4.424

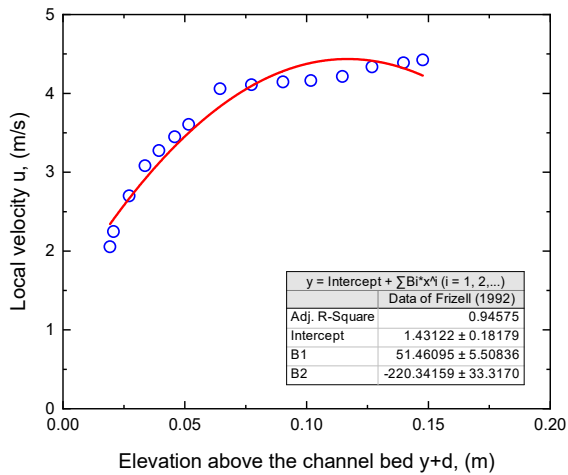
จากตารางที่ 1 ทราบว่าตำแหน่งของการเก็บข้อมูล ($y + d$) เท่ากับ 0.148 m ซึ่งมีค่าความเร็วการไหลสูงสุดเท่ากับ 4.424 m/s ทำการพล็อตกราฟโดยกำหนดแกน x คือ ความลึกจากชั้นบันไดจนถึงผิวน้ำ ($y + d$) และแกน y คือ ความเร็วการไหลตามความลึกการไหล (u) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 1 จากรูปที่ 1 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการที่ (7) ได้ดังนี้

$$u = -220.34(y + d)^2 + 51.46(y + d) + 1.43 \quad (14)$$

จากสมการที่ (14) สามารถคำนวณหาขอบเขตชั้นการไหล (δ) และคำนวณหาความเร็วสูงสุดของการไหล (u_m) โดยแทนค่า $B_2 = -220.34$, $B_1 = 51.46$ และ $C = 1.43$ ลงในสมการที่ (8) และสมการที่ (9) ตามลำดับได้ดังนี้

$$\delta = -\frac{51.461}{2(-220.342)} = 0.117 \text{ m} \quad (15)$$

$$u_m = 1.431 - \frac{(51.461)^2}{4(-220.342)} = 4.436 \text{ m/s} \quad (16)$$



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของการไหล, u (m/s) (แกน y) เปรียบเทียบกับตำแหน่งที่เก็บข้อมูล, $y + d$ (m) (แกน x)

ดังนั้นจากการคำนวณข้างต้นทำให้ทราบค่า ความเร็วสูงสุดของการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นปั่นไวด์ (u_m) และขอบเขตชั้นการไหล (δ) ของหน้าตัดการไหล

จากนั้นสามารถทำการคำนวณหาค่าความเร็วเฉือน (u_*) และค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์ (Π) โดยใช้สมการที่ (11) สมการที่ (13) และค่าจากตารางที่ 1 โดยนำค่าขอบเขตชั้นการไหล (δ) หาค่าอัตราส่วนระหว่างตำแหน่งที่เก็บข้อมูลกับขอบเขตชั้นการไหล ($(y + d)/\delta$) พบว่ามีข้อมูลทั้งหมด 12 ข้อมูลที่มีค่าอยู่ในช่วง $0 < \xi < 1$ จากนั้นนำข้อมูลตามตารางตารางที่ 1 พล็อตกราฟให้อยู่ในรูปสมการลอการิทึมพื้นฐานโดย กำหนดแกน x คือ อัตราส่วนระหว่างตำแหน่งที่เก็บข้อมูลกับขอบเขตการไหล (ξ) และแกน y คือ ความเร็วการไหลตามความลึกการไหล (u) สามารถแสดงดังรูปที่ 2 จากรูปที่ 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการที่ (11) ได้ดังนี้

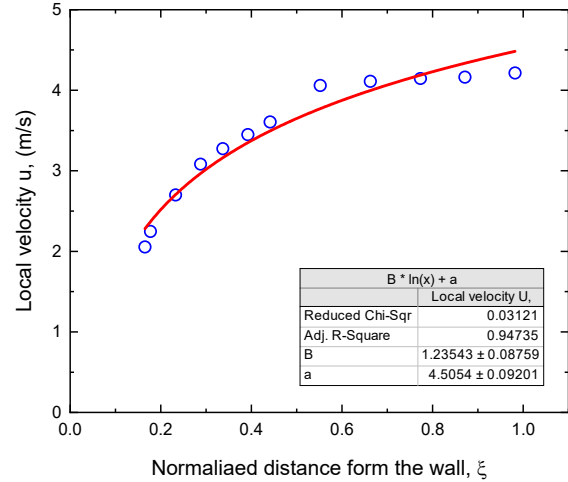
$$u = 1.235 \ln \xi + 4.505 \quad (17)$$

จากสมการที่ (17) มีความชันเท่ากับ $u_*/k = 1.235$ สามารถคำนวณหาความเร็วเฉือน (u_*) โดยหาจากความชันของสมการที่ (17) กำหนดให้ค่าคงที่ของ von Karman $k = 0.41$ ได้ดังนี้

$$u_* = 1.235k = 1.235 \times 0.41 = 0.506 \text{ m/s} \quad (18)$$

จากสมการที่ (17) ค่าคงที่ของสมการเท่ากับ $Bu_* = 4.505$ สามารถคำนวณหาค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์ (Π) โดยแทนค่า Bu_* , u_m และ u_* ลงในสมการที่ (13) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\Pi = 0.5 \left((4.505 - 4.436) \frac{0.410}{0.506} + \frac{1}{3} \right) = 0.139 \quad (19)$$

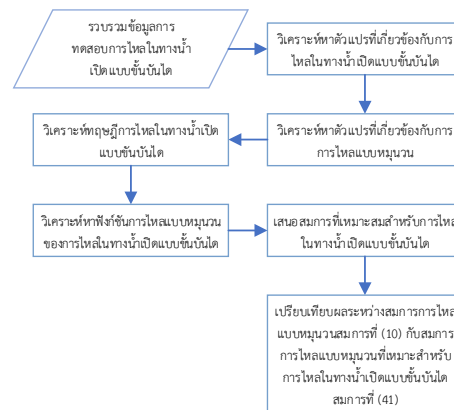


รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของการไหล, u (m/s) (แกน y) เปรียบเทียบกับอัตราส่วนระหว่างตำแหน่งที่เก็บข้อมูลกับขอบเขตการไหล (ξ) (แกน x)

ดังนั้นจากการคำนวณตามขั้นตอนที่กล่าวมาในหัวข้อ 2.2.1 กับข้อมูลทุกชุด เพื่อหาค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์ (Π) โดยกำหนดให้ค่าคงที่ของ von Karman (k) มีค่าเท่ากับ 0.41 พบว่ามีค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์ (Π) เฉลี่ยเท่ากับ 0.126

3. ขั้นตอนการศึกษา

การศึกษานี้สามารถแบ่งลำดับขั้นตอนแสดงดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แผนผังขั้นตอนการศึกษา

4. แก๊ไขสมการการไหลแบบหมุนวน

ในบทนี้ทำการศึกษาเพื่อแก้ไขสมการการไหลแบบหมุนวนให้มีความเหมาะสมสำหรับการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นปั่นไวด์ โดยส่วนที่ 1 วิเคราะห์หาค่าคงที่การไหลแบบชั้นปั่นไวด์ ส่วนที่ 2 วิเคราะห์ตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงความดัน ส่วนที่ 3 วิเคราะห์ตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความเค้นเฉือนบริเวณผนัง และส่วนที่ 4 แสดงผลการเปรียบเทียบสมการการไหลแบบหมุนวน

4.1. วิเคราะห์พฤติกรรมการไหลแบบชั้นบันได

การศึกษานี้กำหนดขอบเขต การพิจารณาการไหลแบบชั้นบันไดที่มีสภาพการไหลแบบปั่นป่วน โดยสมมติให้เป็นการไหลแบบไม่สามารถอัดตัวได้ การไหลผ่านหน้าตัดการไหลเป็นการไหลคงที่ในทิศทางแกน x และกำหนดให้ตัวแปรทุกตัวไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามแกน z วิเคราะห์โดยใช้สมการโมเมนตัม และสมการความต่อเนื่อง โดยสามารถแสดงสมการได้ดังนี้

สมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation)

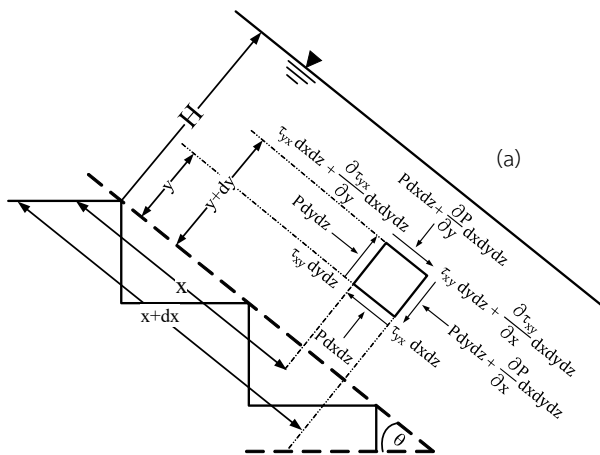
$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

สมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

$$x - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \partial u}{\partial x} + \frac{v \partial u}{\partial y} + \frac{w \partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (21)$$

$$y - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u \partial v}{\partial x} + \frac{v \partial v}{\partial y} + \frac{w \partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (22)$$

จากรูปที่ 4(a) เมื่อวิเคราะห์การไหลในทิศทางแกน x โดยสมการสามารถแสดงได้ดังนี้



$$dy dz - \left(P dy dz + \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \right) - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} dx dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz \right) = \Sigma F \quad (23)$$

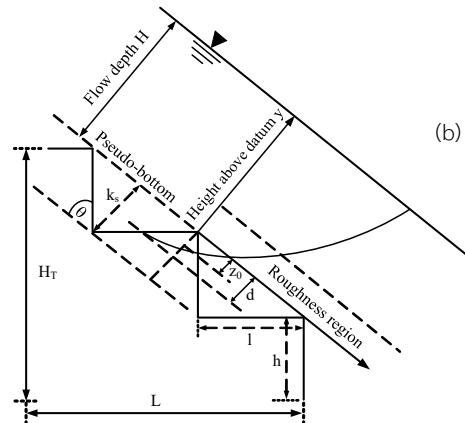
จากเงื่อนไขของขอบเขตที่ใช้วิเคราะห์การไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได เมื่อใช้ร่วมกับสมการที่ (20), สมการที่ (21) และสมการที่ (22) นำเงื่อนไขทั้งหมดแทนลงในสมการที่ (23) และจากรูปที่ 4(a) วิเคราะห์พื้นผิวการไหลของปริมาตรควบคุมที่สนใจ ในทิศทาง dx, dy และ dz โดยเป็นพื้นผิวที่ถูกแรงดัน และความเค้นเฉือนกระทำเนื่องจากการไหล สมการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\left((y + d) - H \right) \left(\frac{dP}{dx} \right) - 2\tau_{yx} + 2 \frac{d\tau_{yx}}{dy} (H - (y + d)) = 0 \quad (24)$$

เมื่อ τ_{yx} = ความเค้นเฉือน เนื่องจากการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได ถูกแบ่งเป็นชั้นการไหลย่อยๆ ดังนั้นการวิเคราะห์หน้าตัดการไหลจึงจำเป็นต้องวิเคราะห์ความหนืดระหว่างชั้นของการไหลด้วย จากการวิเคราะห์ความหนืดของชั้นการไหลสำหรับการไหลในทางน้ำเปิดที่มีท้องน้ำแบบลาดเอียง [20] ได้เสนอสมการดังนี้

$$\tau_{yx} = \rho \bar{\epsilon}_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (25)$$

เมื่อ $\bar{\epsilon}_{yx} = \lambda u_* H, u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ และ $\lambda =$ ความหนืดของชั้นการไหลแบบไร้มิติ



รูปที่ 4 (a) การวิเคราะห์การไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันไดโดยใช้สมการโมเมนตัม, (b) ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์การไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได

จากสมการที่ (25) พบว่าความเร็วเฉือนมีความสัมพันธ์กับความเค้นเฉือนท้องน้ำ ดังนั้นจึงต้องหาค่าของความเค้นเฉือนท้องน้ำ โดยการอินทิเกรตสมการที่ (24) ทำให้สามารถหาค่าคงที่การอินทิเกรตซึ่งมีค่าเท่ากับ $-2\tau_0(H)$ จากนั้นแทนค่าคงที่ลงในสมการที่ (24) และจัดรูปสมการใหม่ จะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (26)

$$\tau_{yx} = \frac{\tau_0(H)}{(H-(y+d))} + \frac{1}{4} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(\frac{2H-(y+d)}{(H-(y+d))} \right) (y + d) \quad (26)$$

แทนค่า $y + d = H, \tau_{yx} = 0$ ลงในสมการที่ (26) และจัดรูปสมการ เพื่อให้รูปแบบของสมการมีความคล้ายคลึงกับสมการการไหลแบบหมุนวน จะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (27)

$$\frac{1}{u_*} \frac{du}{dy} = \frac{1}{(H-(y+d))\lambda} + \frac{H}{4\tau_0} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(\frac{2H-(y+d)}{H-(y+d)} \right) \frac{(y+d)}{\lambda} \quad (27)$$

แทนค่า $\xi = (y+d)/H$ ลงในสมการที่ (27) และจัดรูปใหม่ จากนั้นทำการอินทิเกรต จะได้สมการเป็น

$$\frac{u}{u_*} = \int \frac{d\xi}{(1-\xi)\lambda} + \int \left(\frac{\xi-2}{1-\xi} \right) \frac{\xi}{\lambda} d\xi \quad (28)$$

เนื่องจากสมการที่ (28) มีตัวแปรที่ไม่สามารถหาค่าได้อยู่ ดังนั้นจึงใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ผนวกกับลักษณะการไหลของการไหลแบบชั้นบันได เพื่อแก้ปัญหาโดยจากสมการที่ (28) แสดงให้เห็นว่าอิทธิพลที่มีผลต่อโปรไฟล์ความเร็วของการไหลแบ่งเป็น 2 ส่วนประกอบด้วย ส่วนที่ 1 คือ $\int \frac{d\xi}{(1-\xi)\lambda}$ ซึ่งได้รับอิทธิพลจากความเค้นเฉือนบริเวณผนัง และส่วนที่ 2 คือ $\int \left(\frac{\xi-2}{1-\xi} \right) \frac{\xi}{\lambda} d\xi$ ซึ่งได้รับอิทธิพลจากการเปลี่ยนระดับของความดัน ดังนั้นจากผลของความเค้นเฉือนเป็นไปตามโปรไฟล์การไหลแบบชั้นบันได จากรูปที่ 4(a) และรูปที่ 4(b) Guo and Julien [8] จึงสันนิษฐานให้เทอมแรกสามารถหาค่าได้โดยสมการลอการิทึม แสดงได้ดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{(y+d)u_*}{\nu} \right) + A + w_1(\xi) + w_2(\xi) \quad (29)$$

เมื่อ $w_1(\xi)$ และ $w_2(\xi)$ เป็นฟังก์ชันการไหลแบบหมุนวนของการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได

4.2. วิเคราะห์ความเค้นเฉือนแบบไร้ผนัง

เมื่อพิจารณาขอบเขตการกระจายแรงดันของการไหลแบบชั้นบันได $w_2(\xi) = \int \left(\frac{\xi-2}{1-\xi} \right) \frac{\xi}{\lambda} d\xi$ ซึ่งถือได้ว่าเป็นความเค้นเฉือนแบบไร้ผนังซึ่งคล้ายคลึงกับขอบเขตการไหลผ่านพื้นผิวโค้ง สามารถวิเคราะห์ขอบเขตของ $w'_2(\xi)$ โดยใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ ได้ผลดังนี้

$$w'_2(\xi = 0) = 0 \quad (30)$$

$$w'_2(\xi = 1) = 0 \quad (31)$$

เนื่องจาก $w_2(\xi)$ มีลักษณะคล้ายคลึงกับการเค้นเฉือนแบบไร้ผนัง ดังนั้นจากรูปที่ 4(b) จะสังเกตได้ว่า $W(\xi)$ บริเวณท้องน้ำ หรือ $\xi = 0$ จะมีค่าเท่ากับ ดังนั้น

$$w_2(\xi = 0) = 0 \quad (32)$$

จากการศึกษาสมการการไหลแบบหมุนวน [3] เสนอขอบเขตฟังก์ชันการไหลแบบหมุนวนของการไหลในทางน้ำเปิดเมื่อ $\xi = 1$ แสดงได้ดังนี้

$$W(\xi) = w_2(\xi = 1) = 2 \quad (33)$$

เนื่องจากลักษณะของหน้าตัดการไหลเป็นไปตามสมการโพลีโนเมียล ดังนั้นจึงเลือกใช้สมการโพลีโนเมียลกำลังสาม เพราะยิ่งกำลังสูงขึ้นจะส่งผลน้อยลงต่อการคำนวณ ดังนั้นจากเงื่อนไขของขอบเขตการไหล จะได้สมการดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{(y+d)u_*}{\nu} \right) + A + w_1(\xi) + \frac{\pi}{k} (-4\xi^3 + 6\xi^2) \quad (34)$$

จากผลการวิเคราะห์ขอบเขตการไหล โดยใช้วิธี พบว่าสมการความเค้นเฉือนแบบไร้ผนัง มีความคล้ายคลึงกับสมการของ White [21]

4.3. วิเคราะห์ความเค้นเฉือนบริเวณผนัง

เมื่อพิจารณาอิทธิพลจากความเค้นเฉือนบริเวณผนังของการไหลแบบชั้นบันได โดยใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ สามารถวิเคราะห์ขอบเขตของ $w_1(\xi)$ จากสมการที่ (34) โดยใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ ได้ผลดังนี้

$$w'_1(\xi = 1) = -\frac{1}{k} \quad (35)$$

$$w'_1(\xi = 0) = 0 \quad (36)$$

$$w''_1(\xi = 1) = \frac{1}{k} + \frac{12\pi}{k} \quad (37)$$

$$w''_1(\xi = 0) = -\frac{12\pi}{k} \quad (38)$$

เนื่องจาก $w_1(\xi)$ มีลักษณะความเค้นเฉือนบริเวณผนัง ดังนั้นจากรูปที่ 4(b) จะสังเกตได้ว่า $W(\xi)$ บริเวณท้องน้ำ เมื่อ $\xi = 0$ จะมีค่าเท่ากับ ดังนั้น

$$w_1(\xi = 0) = 0 \quad (39)$$

จากนั้นทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ จากขอบเขตการไหลที่มีผลจากความเค้นเฉือนบริเวณผนัง ได้ดังนี้

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{(y+d)u_*}{\nu} \right) + A + \frac{1}{k} \left((8\pi - 2.92k + 1)\xi^3 + (-6\pi + 2.19k - 1)\xi^4 \right) \quad (40)$$

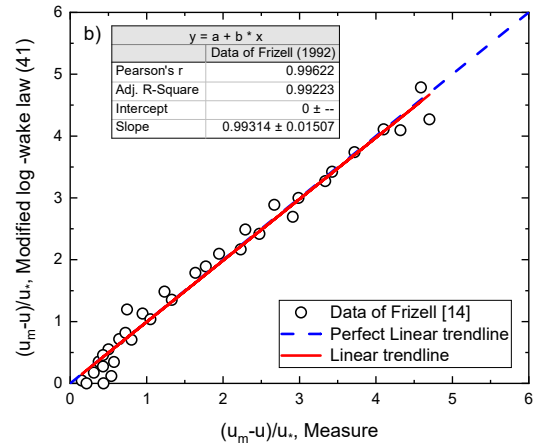
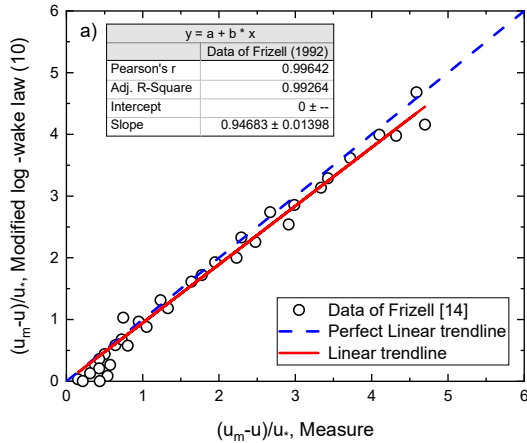
จากสมการข้างต้นมีค่าแตกต่างจากสมการการไหลแบบหมุนวนตามแบบของ [3], [8] เนื่องจากสมการที่ (40) ได้ถูกปรับเพื่อให้เหมาะสมกับการไหลแบบชั้นบันได ดังนั้นสามารถจัดรูปใหม่โดยแทนค่า $\xi = 1, u_m$ และ $w_1(1) = -0.73$ ลงในสมการที่ (34) และทำการจัดรูปใหม่ แสดงได้ดังสมการ

$$\frac{u_m - u}{u_*} = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{(y+d)}{\delta} \right) + \frac{1}{k} \left((2\pi - 0.73k) \left((8\pi - 2.92k + 1)\xi^3 + (-6\pi + 2.19k - 1)\xi^4 \right) \right) \quad (41)$$

4.4. ผลการเปรียบเทียบ

เมื่อนำสมการที่ (38) มาทดสอบโดยใช้ข้อมูล Frizell [14], Ward [15], Boes and Hager [16], Hunt and Kadavy [17] และ

Lueker [18] เพื่อแสดงผลเปรียบเทียบค่าของสมการการไหลแบบหมุนวนของ Guo and Julien [9] และ สมการการไหลแบบหมุนวนที่เหมาะสมกับการไหลแบบชั้นบันได แสดงตัวอย่างผลดัง รูปที่ 5



รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้จากการเก็บวัดจริง (แกน x) เปรียบเทียบกับข้อมูลที่สามารถคำนวณได้จากสมการ (แกน y), (a)คำนวณได้จากสมการที่ (10) และ (b)คำนวณได้จากสมการที่ (41) โดยใช้ข้อมูลของ Frizell [14]

ดังนั้นจากผลการเปรียบเทียบสมการการไหลแบบหมุนวนสมการที่ (10) กับสมการการไหลแบบหมุนวนที่เหมาะสมกับการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันไดสมการที่ (41) สามารถสรุปโดยใช้ค่าทางสถิติได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ข้อมูลทางสถิติของผลการเปรียบเทียบสมการการไหลแบบหมุนวน

Authors	สมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (10)		สมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (41)	
	Correlation coefficient(R_{cc})	R Square(R^2)	Correlation coefficient(R_{cc})	R Square(R^2)
Frizell [14]	0.947	0.992	0.993	0.992
Ward [15]	0.873	0.927	0.948	0.938
Bose and Hager [16]	0.966	0.977	0.975	0.978
Hunt and Kadavy [17]	0.95	0.972	0.994	0.975
Lueker [18]	0.91	0.964	0.951	0.961

5. สรุป

จากการศึกษาสมการหมุนวนร่วมกับสมการการไหลแบบปั่นป่วนในการจำลองพฤติกรรมการไหลบนทางน้ำที่มีความชันสูง โดยใช้การวิเคราะห์ทางทฤษฎี ทางกายภาพและทางคณิตศาสตร์ จากการวิเคราะห์ดังกล่าวทำให้ทราบว่า การไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันไดได้รับอิทธิพลจากสองส่วน คือ ความเค้นเฉือนบริเวณผนัง และผลจากการไล่ระดับความดัน (การเฉือนแบบไร้ผนัง) เพื่อปรับสมการลอการิทึมพื้นฐาน และสมการการไหลแบบหมุนวนให้เหมาะสมสำหรับการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได แสดงในสมการที่ (41) ดังนั้นจากผลการวิเคราะห์สามารถสรุปดังต่อไปนี้

- 1) สมการที่เสนอประกอบด้วยสามส่วน คือ ส่วนที่เป็นสมการลอการิทึมโดยสมมติให้ค่าคงที่ของ von Karman มีค่าเท่ากับ 0.41 ส่วนที่เพิ่มเติมเป็นสมการพหุนามกำลัง 3 โดยมีค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์เท่ากับ 0.126 และส่วนที่ปรับแก้ให้มีความเหมาะสมกับการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได โดยเป็นสมการพหุนามกำลัง 4 จะสังเกตได้ว่าในสมการจะมีค่าคงที่การไหลแบบหมุนวนของโคลส์ เพื่อให้สอดคล้องกับลักษณะการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นบันได ซึ่งเป็นผลจากการไหลแบบหมุนวนบริเวณชั้นบันได
- 2) จากผลการเปรียบเทียบสมการการไหลแบบหมุนวนสมการที่ (10) ซึ่งเป็นสมการในรูปแบบของโคไซน์ กับสมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (41) ซึ่งเป็นสมการในรูปแบบของสมการพหุนาม โดยมีข้อมูลทั้งหมด 68 ชุด จากการเปรียบเทียบเชิงสถิติพบว่า

สมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (41) มีค่า Correlation coefficient (R_{cc}) มากกว่าสมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (10) อยู่ในช่วงประมาณ 2-10 เปอร์เซนต์ แสดงดังตารางที่ 2 ซึ่งสามารถสรุปตามนัยทางสถิติได้ว่า การใช้สมการสมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (41) ในการคำนวณจะได้ข้อมูลที่เป็นไปในทิศทางเดียวกับข้อมูลจากการทดสอบ(ข้อมูลเก็บวัด) และมีความเข้าใกล้กันระหว่างข้อมูลมากกว่าสมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (10) ดังนั้นการใช้สมการสมการการไหลแบบหมุนวน สมการที่ (41) มีความเหมาะสมกับการไหลในทางน้ำเปิดแบบชั้นปั่นไทม์มากกว่า

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี และภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

7. การอ้างอิง

- [1] Cheng X.J., Gulliver J.S. (2011). Velocity Profile for Developing Flow over Stepped Spillway. *Proceedings of the Sixth International Conference on Fluid Mechanics*. AIP Conf. Proc. Vol 1376, 343-350 DOI:10.1063/1.3651914
- [2] George W.K. (2007). Is there a Universal Log-Law for Turbulent Wall-Bounded Flows. *Phil. Trans. Royal. Soc. A* 365, 789-806. DOI: 10.1098/rsta.2006.1941
- [3] Coles D. (1956). The Law of the Wake in the Turbulent Boundary. *J. Fluid Mech* 1, 191-226. DOI: 10.1017/S0022112056000135
- [4] Hinze J.O. (1975). *Turbulence 2nd Ed.* McGraw-Hill, New York, NY, USA, p698.
- [5] Guo J. (1998). Turbulent Velocity Profiles in Clear Water and Sediment-Laden Flows. PhD Dissertation Colorado State University, USA.
- [6] Guo J., Julien P.Y. (2001). Turbulent Velocity Profiles in Sediment-Laden Flows. *J. Hydr. Res. IAHR* 39(1), 11-23. DOI: 10.1080/00221680109499798
- [7] Guo J., Julien P.Y. (2003). Modified Log-Wake Law for Turbulent Flow in Smooth Pipes. *J. Hydraul. Res. IAHR* 41(5), 493-501. DOI: 10.1080/00221680309499994
- [8] Guo J., Julien P.Y., Meroney R.N. (2005). Modified Log-Wake Law in Zero-Pressure-Gradient Turbulent Boundary Layers. *J. of Hydr. Research IAHR* 43(4), 421-430. DOI: 10.1080/00221680509500138
- [9] Guo J.K., Julien P.Y. (2008). Application of the Modified Log-Wake Law in Open-Channels. *Journal*

of Applied Fluid Mechanics 1(2), 17-23 DOI: 10.1061/40856(200)200

- [10] Coleman, Neil L. (1986). Effects of suspended sediment on the open-channel velocity distribution. *Water Resources Research AGU* 22(10), 1377-1384. DOI: 10.1029/WR022i010p01377
- [11] Kironoto B.A., Graf W.H. (1994). Turbulence characteristics in rough uniform open-channel flow. *Proc. Instn Civ. Engrs Wat. Marit. & Energy* 106(12), 333-344. DOI: 10.1680/iwtme.1995.28114
- [12] Lyn D. A. (1986). *Turbulence and Turbulent Transport in Sediment-Laden Open-Channel Flows*. Ph.D. Dissertation of California Institute of Technology, USA.
- [13] Sarma K.V.N., Prasad B.V.R., Sarma A.K. (2000). Detailed study of binary law for open channels. *J. Hydr. Engrg., ASCE* 126(3), 210-214. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2000)126:3(210)
- [14] Frizell, K.H. (1992). Hydraulics of stepped Spillways for RCC dams and dam rehabilitations, *Preprint of the ASCE Roller Compacted Concrete III Conference*, San Diego, USA, 423-439.
- [15] Ward J.P. (2002). Hydraulic design of stepped spillways. PhD Dissertation Colorado State University, USA.
- [16] Boes R.M., Hager W.H. (2003). Two-phase flow characteristics of stepped spillways. *J Hydraul Eng-ASCE* 129, 661-670. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:9(661)
- [17] Hunt S.L., Kadavy K.C. (2008). Velocities and energy dissipation on a flat-sloped stepped spillway. *In Proceedings of the 2008 American Society of Agricultural and Biological Engineers (ASABE) Annual International Meeting*, 29 June-2 July 2008. Providence, RI, USA.
- [18] Lurker M.L., Mohseni O. Gulliver J.S., Schulz H. (2008). Christopher, R.A. *The Physical Model Study of the Folsom Dam Auxiliary Spillway System*. Project Report 511 University of Minnesota, St. Anthony Falls Laboratory, Minneapolis, MI, USA, 2008.
- [19] Krogstad P.A., et al. (1992). Comparison between Rough-Wall and Smooth-Wall Turbulent Boundary Layers. *Journal of Fluid Mechanics* 245, 599-617. DOI: 10.1017/S0022112092000594

[20] Shiono K., Knight D. (1991) Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *J Fluid Mech* 222, 617–646 DOI: 10.1017/S0022112091001246

White F.M. (1991). *Viscous Fluid Flow*. 2nd edition, McGraw-Hill. New York, NY, USA, p417.