

## การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF VARIABLE-ARC-LENGTH PIPE TRANSPORTING FLUID USING FINITE ELEMENT METHOD

นพวิชญ์ นาควิโรจน์<sup>1</sup> ปภาวรินทร์ สมวงศ์<sup>1</sup> ศิริรักษา วงศ์จักร<sup>1</sup> และการ์รันต์ คล้ายฉำ<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> นิสิตปริญญาตรี ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม ประเทศไทย

<sup>2</sup> อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม ประเทศไทย

\*Corresponding author address: karun.kl@ku.ac.th

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยคำนึงถึงผลกระทบจากแรงทางด้านข้างและการเปลี่ยนแปลงแรงดันของไหลภายในท่อ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อได้รับการพัฒนาขึ้นโดยใช้หลักการพลังงาน นอกจากนี้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับคำนวณหาแรงภายในท่อซึ่งได้จากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยของท่อ การเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อสามารถคำนวณได้โดยอาศัยสมการของออยเลอร์-แบร์นูลลี ในการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกใช้สำหรับการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข ซึ่งพบว่าได้คำตอบที่สอดคล้องกับวิธียิงเป้าจากงานวิจัยในอดีต ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าความเร็วของไหลและแรงอัดที่จุดรองรับทำให้เกิดการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นและส่งผลกระทบต่อสูญเสียเสถียรภาพ

**คำสำคัญ:** การแอ่นตัวมาก, ท่อที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้, วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, สมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น, หลักการพลังงาน

### Abstract

This paper presents the large deflection analysis of variable-arc-length pipe (VAL pipe) transporting fluid by considering the effects of lateral load and internal pressure variation. The mathematical model of the VAL pipe is derived by using the energy principle. Additionally, the set of nonlinear first-order differential equations regarding the internal forces are derived by considering the equilibrium of force and moment of the differential pipe segment. The variation of internal pressure along the pipe is calculated by using the Euler-Bernoulli equation. In this study, the finite element method is used to solve the numerical solution, which is found to be compatible with those results from the shooting method given in the previous research. The numerical results indicate that the effects of the internal fluid velocity and compression at the support are to increase the pipe displacement and cause to lose the pipe stability.

**Keywords:** Energy principle, Large deflection, Nonlinear first-order differential equation, Finite element method, Variable-arc-length pipe

### 1. บทนำ

ปัญหาการแอ่นตัวมากของโครงสร้างที่มีความขรุขระสูงและมีความยาวส่วนโค้งของตัวโครงสร้างสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามน้ำหนักที่กระทำจัดเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนและไม่สามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย โครงสร้างประเภทนี้จัดเป็นโครงสร้างประเภทอิลาสติกคาซึ่งมีนักวิจัยให้ความสนใจและมุ่งเน้นศึกษาพฤติกรรมทางด้านกลศาสตร์มาอย่างต่อเนื่อง เช่น การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ ได้แก่ น้ำหนักกระทำแบบจุด [1-3]

น้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน [4] โมเมนต์กระทำที่ปลายคาน [5] เป็นต้น การศึกษาวิเคราะห์ส่วนใหญ่อาศัยวิธีเชิงทฤษฎีโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข วิธีการวิเคราะห์ที่เป็นที่นิยมได้แก่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [6] วิธียิงเป้า [7] และวิธีอิลลิปติกอินทิกรัล [8]

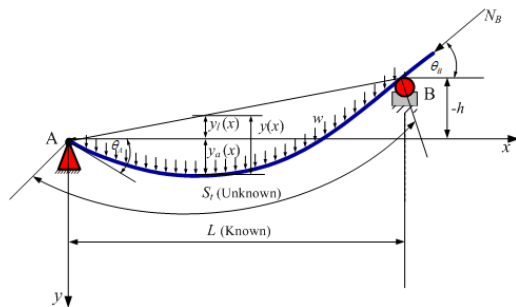
อย่างไรก็ดีโครงสร้างประเภทนี้สามารถประยุกต์ใช้สำหรับการวิเคราะห์ท่อลำเลียงปิโตรเลียมใต้ทะเลได้ [9] ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้ทำการศึกษาโครงสร้างที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันซึ่งเป็นท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ได้แก่

การศึกษาเสถียรภาพของท่อลำเลียงของโดย Chucheepeasakul และ Monprapussorn [10] ซึ่งได้ใช้วิธีอีลิเมนต์อินทิกรัลและวิธียิงเป้าในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข และได้นำเสนอค่าความเร็วของไหลวิกฤติที่ทำให้ท่อเกิดการโค้งงอโดยไม่ได้พิจารณาแรงดันข้างจากน้ำหนักของท่อ ต่อมาภายหลัง Athisakul และคณะ [11] ได้ประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของท่อที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยรวมผลของน้ำหนักท่อด้วย อย่างไรก็ตามแรงดันน้ำภายในท่อถูกพิจารณาเข้ากับแรงตามแนวแกน ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ผลของการเปลี่ยนแปลงแรงดันภายในท่อต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวของท่อได้เด่นชัดนัก

ดังนั้นงานวิจัยนี้ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยหลักการพลังงานโดยรวมผลจากแรงกระทำทางด้านข้างจากน้ำหนักท่อและการเปลี่ยนแปลงแรงดันภายในท่อ จากนั้นใช้ “วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์” (Finite Element Method : FEM) ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข และศึกษาผลกระทบจากความเร็วของไหลภายในท่อ และแรงอัดที่ปลายท่อ ต่อพฤติกรรมการแอ่นตัว และแรงภายในต่างๆที่เกิดขึ้นกับท่อ และแบบจำลองจากงานวิจัยฉบับนี้สามารถนำไปประยุกต์และพัฒนาต่อยอดเพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างอื่นๆที่คล้ายคลึงกัน เช่น ท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล (Marine Riser) โดยการพิจารณาและจำลองแรงจากคลื่นและกระแสน้ำมากระทำกับโครงสร้าง

## 2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

### 2.1. ลักษณะของปัญหา



รูปที่ 1 รูปร่างการแอ่นตัวมากของท่อที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

รูปที่ 1 แสดงท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำได้แก่ น้ำหนักท่อแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวท่อ ( $w_p$ ) น้ำหนักของไหลภายในท่อ ( $w_f$ ) โดยจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของท่อวางต่างระดับกัน จุดรองรับที่ปลายด้านซ้าย (จุด A) เป็นแบบยึดหมุนและแรงดันน้ำทางเข้าที่จุดรองรับนี้ ขณะที่ปลายด้านขวา (จุด B) จะห่างออกไปจากจุด A ตามระยะในแนวราบเท่ากับ  $L$  ซึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับที่ยอมให้ท่อสามารถเลื่อนผ่านได้ภายใต้แรงอัด ( $N_B$ ) ที่ปลาย

เนื่องจากปลายท่อสามารถเลื่อนไกลผ่านจุดรองรับ ส่งผลให้ที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ไม่ทราบค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อ ( $S_t$ ) เมื่อน้ำหนักบรรทุกต่างๆมากระทำทำให้ท่อแอ่นตัวจากตำแหน่งก่อนการเสียรูป ( $y_l$ ) โดยมีค่าการแอ่นตัวเท่ากับ ( $y_a$ ) ดังนั้นตำแหน่งของคานที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ ( $y$ ) ที่พิกัดต่างๆในแนวราบ ( $x$ ) คำนวณได้โดย

$$y = y_l + y_a \quad (1)$$

ณ สภาวะก่อนการเสียรูปของท่อ ตำแหน่งของท่อเป็นฟังก์ชันของพิกัดตามแนวราบ ( $x$ ) ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก  $y_l = (h/L)x$  หลังจากรับน้ำหนักบรรทุกได้แก่ น้ำหนักท่อ ( $w_p$ ) น้ำหนักของไหลภายในท่อ ( $w_f$ ) แรงอัดที่ปลายด้านขวา ( $N_B$ ) แรงจากการชนถ่ายของไหลที่มีความเร็วคงที่ ( $V_c$ ) แรงดันน้ำทางเข้าที่ปลายด้านซ้ายของท่อ ( $P_A$ ) ทำให้ท่อเกิดการแอ่นตัวเท่ากับ  $y_a$  ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยกระบวนการเชิงตัวเลข

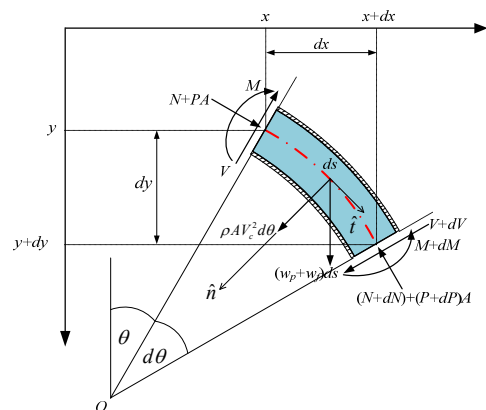
### 2.2. ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตและสมการสมดุลของท่อ

รูปที่ 2 แสดงผังอิสระของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวน้อยๆ  $ds$  จากรูปสามารถแสดงสมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของท่อได้ดังนี้

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \quad (2ก)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta = \frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}} \quad (2ข)$$

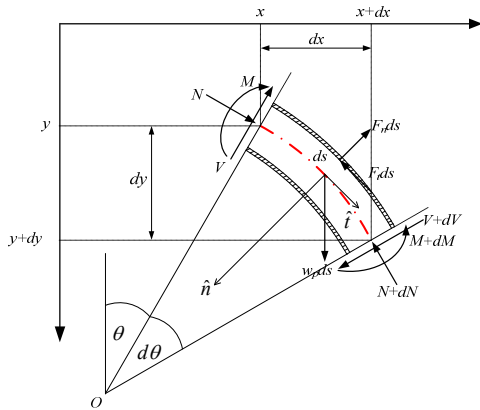
$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (2ค)$$



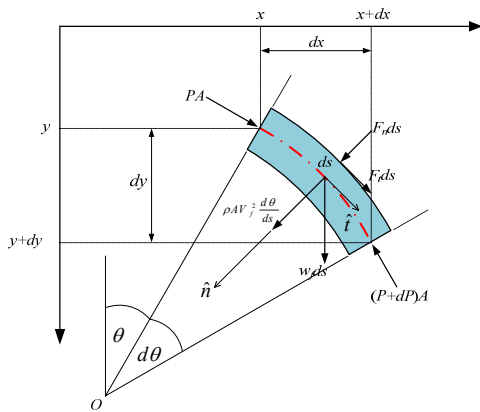
รูปที่ 2 ผังอิสระของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวน้อยๆ  $ds$

เมื่อ  $\kappa$  คือค่าความโค้งของท่อ ตัวแปร  $S$  คือพิกัดตามความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  คือมุมระหว่างแนวราบกับแนวสัมผัสของท่อ รูปที่ 2 แสดงชิ้นส่วนย่อยของท่อและของไหลภายในท่อซึ่งมีความซับซ้อนและยากต่อการเขียนสมการสมดุลของท่อลำเลียงของไหล เพื่อให้

ง่ายต่อการวิเคราะห์จึงได้แยกพิจารณาท่อและของไหลภายในออกจากกันตามรูปที่ 3 และรูปที่ 4 ตามลำดับ และจะใช้หลักการ Superposition ในการรวมระบบนี้เข้าด้วยกัน



รูปที่ 3 ผังอิสระชิ้นส่วนโครงสร้างของท่อ



รูปที่ 4 ผังอิสระของไหลภายในชิ้นส่วนโครงสร้างของท่อ

จากการพิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของท่อที่มีความยาวส่วนโค้งน้อยๆ ( $ds$ ) ตามรูปที่ 3 ผลรวมของแรงในแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสีรูปของท่อได้แสดงดังสมการ (3ก) และ (3ข) ตามลำดับ และสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด  $O$  ได้แสดงดังสมการ (3ค)

$$F_t = -\frac{dN}{ds} - V\frac{d\theta}{ds} + w_p \sin\theta \quad (3ก)$$

$$F_n = \frac{dV}{ds} - N\frac{d\theta}{ds} + w_p \cos\theta \quad (3ข)$$

$$\frac{dM}{ds} = V \quad (3ค)$$

เมื่อ  $N$  และ  $V$  คือแรงดึงตามแนวแกนและแรงเฉือนตามลำดับ จากทฤษฎีความยืดหยุ่นและการเสีรูปของโครงสร้างจากสมการที่ (2ค) สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและค่าความโค้งของท่อ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$M = -EI\frac{d\theta}{ds} = -EI\frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (4)$$

ตัวแปร  $EI$  คือค่าความแข็งต้านการดัดของท่อ รูปที่ 4 แสดงผังอิสระของของไหล จากรูปนี้สามารถเขียนสมการสมดุลของแรงในทิศทางตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากของชิ้นส่วนของของไหลได้ตามสมการที่ (5ก) และ (5ข) ตามลำดับ

$$F_t = A_i \frac{dP}{ds} - w_f \sin\theta \quad (5ก)$$

$$F_n = PA_i \frac{d\theta}{ds} - \rho A_i V_c^2 \frac{d\theta}{ds} - w_f \cos\theta \quad (5ข)$$

เมื่อตัวแปร  $A_i$  คือพื้นที่หน้าตัดภายในของท่อ  $w_f$  คือน้ำหนักต่อความยาวของไหล  $V_c$  คือความเร็วของไหล  $P$  คือแรงดันภายในท่อ จากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ของท่อและของไหลภายในท่อตามสมการที่ (4) และ (5) ตามลำดับ สามารถใช้วิธี Superposition เพื่อหาสมการสมดุลของระบบรวมได้ ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 แบบไม่เป็นเชิงเส้น ประกอบด้วยสมการสมดุลของแรงตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสีรูปของท่อ ดังสมการที่ (6ก) และ (6ข) ตามลำดับ ขณะที่สมการที่ (6ค) คือสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด  $O$

$$\frac{dN}{ds} = -V\frac{d\theta}{ds} - A\frac{dP}{ds} + (w_p + w_f) \sin\theta \quad (6ก)$$

$$\frac{dV}{ds} = N\frac{d\theta}{ds} + PA_i \frac{d\theta}{ds} - \rho A_i V_c^2 \frac{d\theta}{ds} - (w_p + w_f) \cos\theta \quad (6ข)$$

$$\frac{dM}{ds} = V \quad (6ค)$$

โดยสมการที่ (6ก) ได้มาจากการแทนสมการ (3ก) ในสมการที่ (5ก) และสมการ (6ข) ได้มาจากการแทนสมการที่ (3ข) ในสมการที่ (5ข)

### 2.3. การเปลี่ยนแปลงแรงดันของไหล

พิจารณาการเคลื่อนที่ต่อเนื่องของของไหลที่มีการไหลสม่ำเสมอ (Steady flow) ในเชิงอุดมคติ (Ideal Fluid) และของไหลไม่สามารถอัดตัวได้ (Incompressible flow) รวมทั้งไม่มีแรงต้านเนื่องจากความหนืดของของไหล จากรูปที่ 4 ทำให้สามารถเขียนสมการแบร์นูลลีและออยเลอร์ได้ดังนี้

$$y_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (7)$$

$$dy + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = 0 + \frac{P+dP}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \quad (8)$$

เมื่อ  $\gamma$  คือน้ำหนักจำเพาะของของไหล เนื่องขนาดหน้าตัดท่อไม่เปลี่ยนแปลงและจากสมการความต่อเนื่อง  $AV_1 = AV_2$  จะได้

ว่าความเร็วของไหลมีค่าคงที่ กล่าวคือ  $V_1 = V_2 = V_c$  จากสมการที่ (8) ทำให้สามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงแรงดันภายในท่อได้ดังนี้

$$\frac{dP}{ds} = \gamma \frac{dy}{ds} \quad (9)$$

#### 2.4. สมการพลังงานของระบบท่อ

สมการงานและพลังงานของท่อที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\pi = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \frac{EIy''^2}{(1+y'^2)^3} + (\lambda - N - P_A A_i) - (w_p + w_f)y + \rho A_i V_c^2 \kappa \frac{y}{(1+y'^2)^2} \right\} \sqrt{1+y'^2} dx \quad (10)$$

จากสมการข้างต้น พจน์ที่ 1 และ 2 คือพลังงานความเครียดเนื่องจากการตัดและการยืดหดตัวตามแนวแกนของท่อตามลำดับ พจน์ที่ 3 และ 4 คืองานภายนอกเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระทำทางข้าง ( $w_p + w_f$ ) และแรงจากการชนถ่ายของไหลภายในท่อตามลำดับ  $\lambda = EIy''^2/2(1+y'^2)^3$  ตัวคูณที่คำนึงถึงพลังงานส่วนเพิ่มที่เกิดจากการเลื่อนไหลของปลายงานที่จุดรองรับด้านขวา ซึ่งนำเสนอโดยงานวิจัยของ Chucheeprakorn และ Huang [1] ตัวแปร  $N$  คือแรงดึงตามแนวแกนสามารถหาได้จากกรณีการอินทิเกรตสมการที่ (6ก) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของแรงดึงตามแนวแกน และแทนค่าเงื่อนไขขอบเขต  $N = N_B$  ที่ตำแหน่งปลายท่อด้านขวา ( $s = s_t$ ) ทำให้สามารถคำนวณหาแรงดึงตามแนวแกนที่พิกัดต่างๆบนส่วนโค้ง ( $S$ ) ของท่อได้ดังนี้

$$N = N_B + \int_s^{s_t} \left\{ V \frac{d\theta}{ds} + A_i \frac{dP}{ds} - (w_p + w_f) \sin \theta \right\} ds \quad (11)$$

ในที่นี้ ตัวแปร  $N_B$  คือแรงอัดตามแนวแกนที่ปลายท่อด้านขวาของท่อ (จุด B) จากสมการที่ (2ก) และสมการที่ (9) การเปลี่ยนแปลงแรงดันในท่อสามารถคำนวณได้โดย

$$\frac{dP}{ds} = \gamma \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \quad (12)$$

แทนค่าสมการที่ (2ก) (2ค) และ (12) ลงในสมการที่ (11) และเปลี่ยนตัวแปรอิสระที่ใช้สำหรับการอินทิเกรตจากตัวแปร  $S$  เป็น  $X$  ทำให้แรงดึงตามแนวแกนที่พิกัดต่างๆ ตามแนวราบ ( $X$ ) ภายใต้อัดที่จุดรองรับด้านขวา ( $N_B$ ) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$N = N_B + \int_x^L \left\{ V \frac{y'}{(1+y'^2)^{3/2}} + A_i V \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} - (w_p + w_f) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right\} \sqrt{1+y'^2} dx \quad (13)$$

ทั้งนี้ แรงเฉือน ( $V$ ) ในสมการที่ (13) สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (6ค) ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$V = - \frac{EI}{(1+y'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[ \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right] = EI \left[ \frac{3y'y''^2}{(1+y'^2)^3} - \frac{y''}{(1+y'^2)^2} \right] \quad (14)$$

จากสมการงานและพลังงานของระบบท่อสมการที่ (10) ซึ่งเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถนำไปคำนวณและวิเคราะห์หาสมดุลสถิตยศาสตร์ของท่อได้ด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

### 3. การหาค่าตอบเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องแบ่งท่อออกเป็นชิ้นส่วนย่อยเท่าๆกัน ซึ่งการศึกษานี้ได้แบ่งชิ้นส่วนย่อยของท่อตามพิกัดในแนวราบ โดยแต่ละเอลิเมนต์จะยาวเท่ากัน  $l = L/nelm$  สมการของงานและพลังงานของระบบทั้งหมดหาได้จากกรรวมพลังงานของแต่ละเอลิเมนต์ย่อยดังนี้  $\pi = \sum_{k=1}^{nelm} \pi_k$  ซึ่งค่าการแอ่นตัวภายในเอลิเมนต์ของท่อสามารถประมาณได้โดยใช้เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่าง  $[N]$  และเวกเตอร์ดิสกรีอิสรที่โหนดปลายทั้ง 2 ด้านของแต่ละเอลิเมนต์  $\{q\}$  ดังนี้

$$y_a = [N]\{q\} \quad (15ก)$$

$$y'_a = [N']\{q\} \quad (15ข)$$

$$y''_a = [N'']\{q\} \quad (15ค)$$

โดยเวกเตอร์  $\{q\}$  ประกอบด้วยค่าการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของท่อ และค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ของการเคลื่อนที่เทียบกับตัวแปร  $x$

$$\{q\} = \{y_{a1} \ y'_{a1} \ y''_{a1} \ y_{a2} \ y'_{a2} \ y''_{a2}\}^T \quad (16)$$

และเวกเตอร์  $[N]$  คือฟังก์ชันรูปร่างซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] \quad (17)$$

$N_i$  คือฟังก์ชันพหุนามดีกรี 5 [12] จากสมการที่ (10) และ (15) จะได้ว่าสมดุลของท่อแต่ละเอลิเมนต์สามารถหาได้จาก  $\partial \pi_k / \partial q = 0$  (Stationary Condition) ดังนั้นสามารถเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\left( \frac{\partial \pi_k}{\partial q} \right) = \int_0^l \left\{ \frac{EIy''}{(1+y'^2)^{5/2}} [N'']^T - \frac{5EIy''^2 y'}{2(1+y'^2)^{7/2}} [N']^T + \frac{(\lambda - N - P_A A_i) y'}{\sqrt{1+y'^2}} [N]'^T - (w_p + w_f) \sqrt{1+y'^2} [N]'^T + m_f V_c^2 \kappa [N]'^T \right\} dx = 0 \quad (18)$$

หลังจากกรรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยของท่อทั้งระบบแล้วจะใช้กระบวนการทำซ้ำในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข เพื่อความสะดวกในการคำนวณเชิงตัวเลขจะเขียนตัวแปรต่างๆเป็นแบบไร้มิติโดยใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$s^* = \frac{S}{L}, \quad \hat{s}_t = \frac{s_t}{L}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L} \quad (19ก)$$

$$\hat{M} = \frac{ML}{EI}, \quad \hat{P} = \frac{PAL^2}{EI}, \quad \hat{w}_f = \frac{w_f L^3}{EI}, \quad \hat{V} = \frac{VL^2}{EI} \quad (19ข)$$

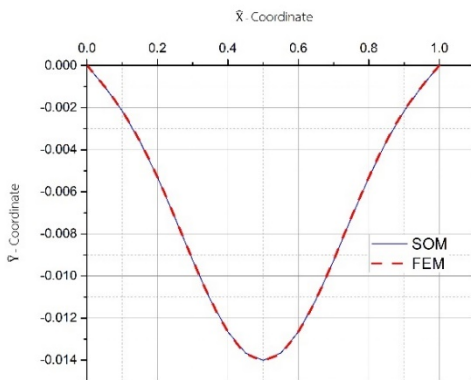
$$\bar{N} = \frac{NL^2}{EI}, \bar{w}_p = \frac{w_p L^3}{EI}, \bar{V}_c = \frac{\rho AV_c^2 L^2}{EI} \quad (19ค)$$

#### 4. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

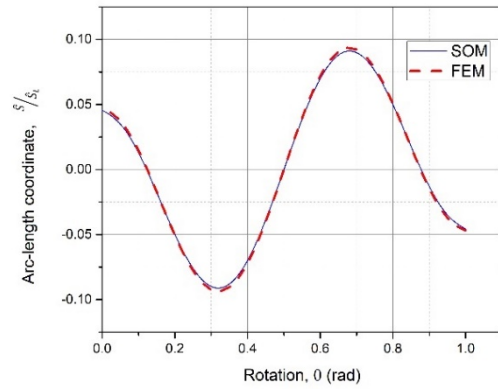
##### 4.1. การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ใน การศึกษานี้ได้นำคำตอบที่ได้มาตรวจสอบกับคำตอบจาวีรียิงเป้า (Shooting Method: SOM) จากงานวิจัย [13] โดยค่าตัวแปรต่างๆ มีดังนี้ น้ำหนักของไหล  $\bar{w}_f = 4$  น้ำหนักท่อ  $\bar{w}_p = 2$  แรงดัน ทางเข้า  $\bar{P}_A = 2$  และความเร็วของไหลภายในท่อ  $\bar{V}_c = 80.852$

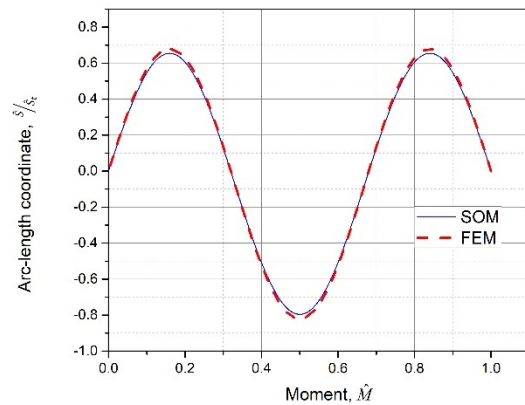
ผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทียบกับวิธียิง เป้า ได้แก่รูปร่างการเสียรูป ( $\hat{x} - \hat{y}$ ) ค่ามุมระหว่างแนวราบกับ แนวแกนท่อ ( $\theta$ ) โมเมนต์ดัด ( $\hat{M}$ ) และแรงเฉือน ( $\hat{V}$ ) ที่ตำแหน่ง ต่างๆของท่อ ( $\hat{s}/\hat{s}_t$ ) ได้แสดงดังรูปที่ 5-8 ตามลำดับ จากรูปพบว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และคำตอบ จากวิธียิงเป้ามีความสอดคล้องกันมาก จึงมีความมั่นใจได้ว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และกระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์มี ความถูกต้องแม่นยำเพียงพอสำหรับการวิเคราะห์พฤติกรรม การอ่อนตัวมากของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยน ได้



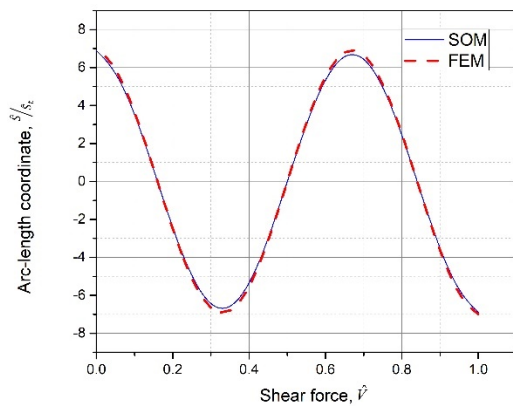
รูปที่ 5 รูปร่างการเสียรูปของท่อจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เทียบกับวิธียิงเป้า (SOM)



รูปที่ 6 ค่ามุม ( $\theta$ ) ที่ตำแหน่งต่างๆ ( $\hat{s}/\hat{s}_t$ ) จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เทียบกับวิธียิงเป้า (SOM) กรณีที่  $\bar{V}_c = 80.8520$



รูปที่ 7 ค่าโมเมนต์ ( $\hat{M}$ ) ที่ตำแหน่งต่างๆ ( $\hat{s}/\hat{s}_t$ ) จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เทียบกับวิธียิงเป้า (SOM) กรณีที่  $\bar{V}_c = 80.8520$



รูปที่ 8 ค่าแรงเฉือน ( $\hat{V}$ ) ที่ตำแหน่งต่างๆ ( $\hat{s}/\hat{s}_t$ ) จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เทียบกับวิธียิงเป้า (SOM) กรณีที่  $\bar{V}_c = 80.8520$

#### 4.2. ผลกระทบของแรงอัดที่ปลายท่อและความเร็วของไหลต่อพฤติกรรมการณ์แอ่นตัวมากของท่อ

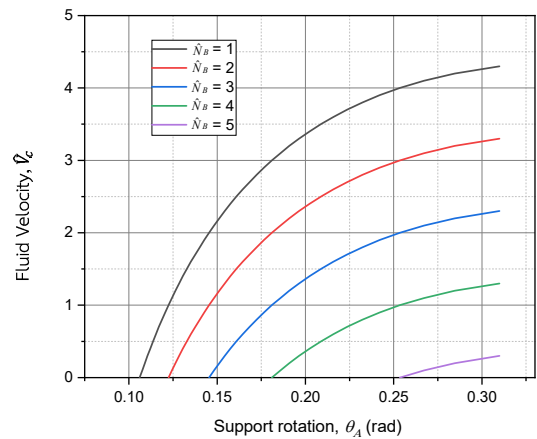
การศึกษาผลของแรงอัดที่ปลายท่อ ( $\hat{N}_B$ ) และความเร็วของไหล ( $\hat{V}_C$ ) ต่อการเสียรูปและแรงภายในที่เกิดขึ้นกับท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ การศึกษานี้ได้กำหนดให้น้ำหนักของไหล ( $\hat{W}_F$ ) น้ำหนักของท่อ ( $\hat{W}_P$ ) ความดันของน้ำที่จุดรองรับด้านซ้าย ( $\hat{P}_A$ ) มีค่าคงที่เท่ากับ 1 และความเร็วของไหลภายในท่อ ( $\hat{V}_C$ ) อยู่ในช่วง 0-4.5 ค่าแรงอัดที่ปลายด้านขวาของท่อ ( $\hat{N}_B$ ) อยู่ในช่วง 1-5

ตารางที่ 1 ค่าตอบเชิงตัวเลขภายใต้แรงอัดที่ปลายท่อค่าต่างๆ

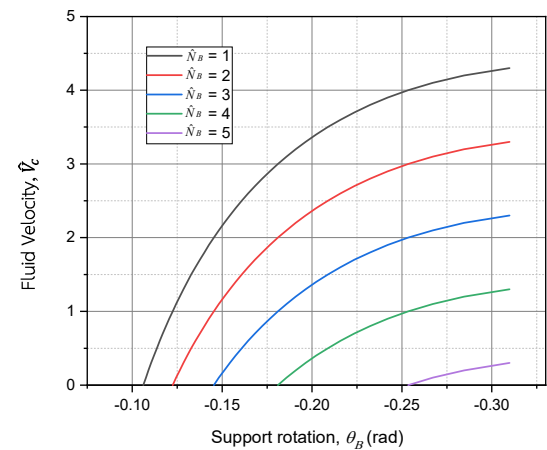
$$(\hat{N}_B = 1-5)$$

$\hat{N}_B$	$\hat{V}_C$	$\theta_A$	$\theta_B$	$\hat{S}_t$
1	0.0	0.1061	-0.1061	1.0028
	1.0	0.1225	-0.1225	1.0037
	2.0	0.1454	-0.1454	1.0052
	3.0	0.1810	-0.1810	1.0081
	4.0	0.2535	-0.2535	1.0161
2	0.0	0.1225	-0.1225	1.0037
	1.0	0.1454	-0.1454	1.0052
	2.0	0.1810	-0.1810	1.0081
	3.0	0.2535	-0.2535	1.0161
	4.0	0.2535	-0.2535	1.0161
3	0.0	0.1454	-0.1454	1.0052
	1.0	0.1810	-0.1810	1.0081
	2.0	0.2535	-0.2535	1.0161
4	0.0	0.1810	-0.1810	1.0081
	1.0	0.2535	-0.2535	1.0161
5	0.0	0.2535	-0.2535	1.0161

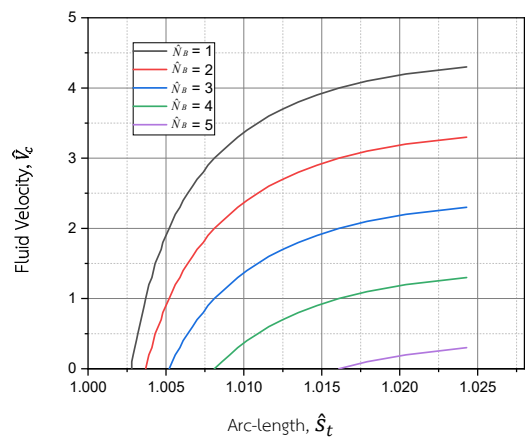
รูปที่ 9 และ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของไหลกับค่ามุมที่ปลายด้านซ้าย ( $\theta_A$ ) และปลายด้านขวา ( $\theta_B$ ) ตามลำดับภายใต้แรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ รูปที่ 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของไหลกับค่าความยาวส่วนโค้ง จากรูปพบว่าผลของความเร็วของไหลและแรงอัดที่ปลายท่อส่งผลทำให้เกิดการแอ่นตัวมากขึ้น และส่งผลทำให้ความยาวส่วนโค้งของท่อเพิ่มมากขึ้น โดยแรงอัดที่ปลายท่อจะทำให้เกิดการเริ่มต้นและความเร็วของไหลที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ท่อเกิดการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น มุมที่จุดรองรับของท่อทั้ง 2 ด้านจะเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามเนื่องจากท่อเกิดการเสียรูปแบบสมมาตรรอบแกน ทั้งนี้ผลค่าตอบเชิงตัวเลขต่างๆได้แสดงไว้ในตารางที่ 1



รูปที่ 9 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\hat{V}_C$  และ  $\theta_A$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ

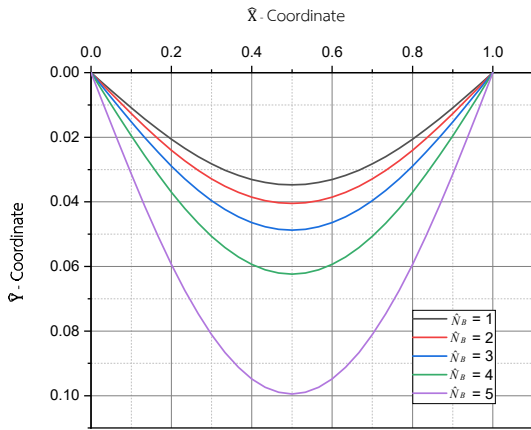


รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\hat{V}_C$  และ  $\theta_B$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ

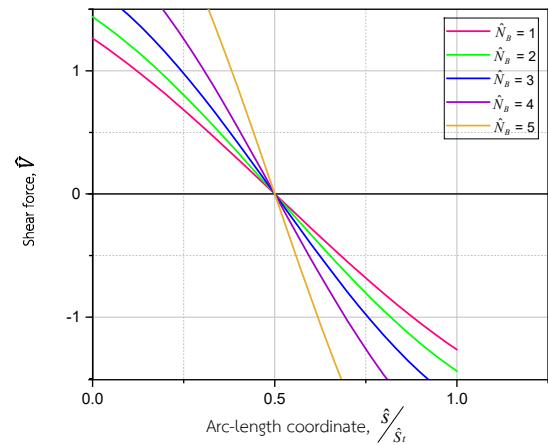


รูปที่ 11 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\hat{V}_C$  และ  $\hat{S}_t$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ

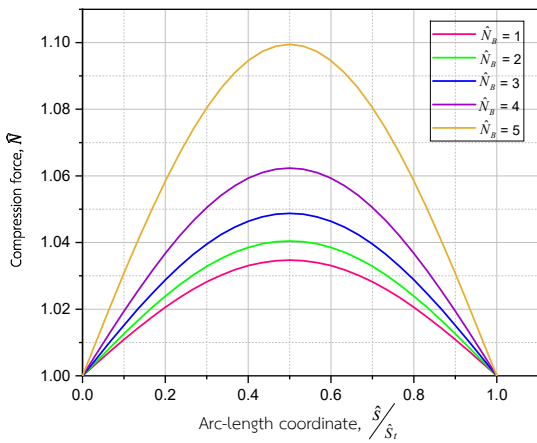




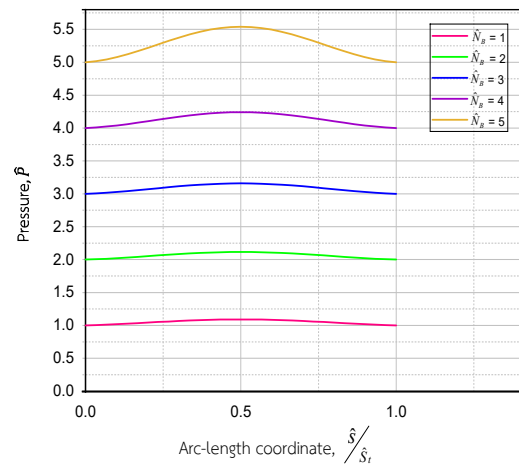
รูปที่ 12 รูปร่างการแอ่นตัวของท่อนเมื่อ  $\hat{V}_C = 0.3$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ



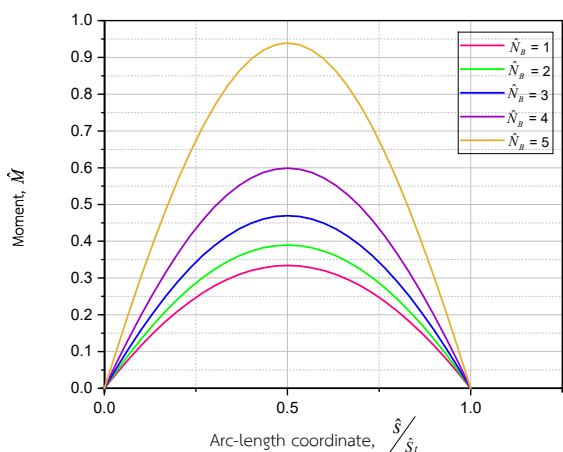
รูปที่ 15 แรงเฉือนที่ตำแหน่งต่างๆของท่อนเมื่อ  $\hat{V}_C=0.3$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ



รูปที่ 13 แรงตามแนวแกนที่ตำแหน่งต่างๆของท่อนเมื่อ  $\hat{V}_C = 0.3$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ



รูปที่ 16 แรงดันที่ตำแหน่งต่างๆของท่อนเมื่อ  $\hat{V}_C = 0.3$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ



รูปที่ 14 โมเมนต์ที่ตำแหน่งต่างๆของท่อนเมื่อ  $\hat{V}_C = 0.3$  ภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ

รูปที่ 12 แสดงรูปร่างการแอ่นตัวของท่อนภายใต้ค่าแรงอัดที่ปลายท่อต่างๆ ( $\hat{N}_B=1-5$ ) เมื่อความเร็วของไหลมีค่าคงที่ เมื่อ  $\hat{V}_C=0.3$  จากพฤติกรรมการแอ่นตัวของท่อนในรูปที่ 12 เมื่อพิจารณาค่าแรงอัดตามแนวแกน โมเมนต์ดัด แรงเฉือนและแรงดันภายในท่อดังแสดงตามรูปที่ 13-16 ตามลำดับ ซึ่งพบว่าแรงอัดที่ปลายท่อส่งผลให้ท่อเกิดการแอ่นตัวมากขึ้น และทำให้โมเมนต์ดัดและแรงอัดเพิ่มมากขึ้นและมีค่ามากที่สุดที่บริเวณกึ่งกลางช่วงของจูดรองรับ เช่นเดียวกับแรงเฉือนแต่จะมีค่ามากที่สุดบริเวณจูดรองรับ นอกจากนี้แรงอัดที่ปลายยังทำให้แรงดันภายในท่อมากขึ้น ซึ่งจะมีค่ามากที่สุดบริเวณกึ่งกลางช่วงของจูดรองรับเนื่องจากตำแหน่งดังกล่าวเป็นจุดต่ำสุดและมีพลังงานศักย์ต่ำสุด ตามหลักการอนุรักษ์พลังงานจุดต่ำสุดของท่อจึงมีแรงดันที่สูงที่สุด

## 5. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การศึกษานี้ได้พิจารณาผลกระทบจากแรงกระทำด้านข้างเนื่องจากน้ำหนักของท่อและการเปลี่ยนแปลงแรงดันของไหลภายในท่อ ผลคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหา จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความสอดคล้องกับค่าที่ได้จากวิธียิงเป้า จากการศึกษาพารามิเตอร์ต่างๆที่มีผลต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของท่อลำเลียงของไหล พบว่าแรงอัดที่ปลายท่อและความเร็วของไหลทำให้เกิดการแอ่นตัวเพิ่มมากขึ้น ซึ่งส่งผลทำให้ค่าโมเมนต์ดัด แรงอัดตามแนวแกน แรงเฉือน และแรงดันภายในท่อเพิ่มขึ้น ซึ่งมีผลโดยตรงต่อเสถียรภาพของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

## 6. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณภาคีวิศวกรโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความอนุเคราะห์สถานที่สำหรับการทำวิจัยและสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้ จนกระทั่งงานวิจัยสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

## 7. เอกสารอ้างอิง

- [1] Chucheepsakul, S. and Huang, T. (1997). Finite Element Solution of Variable-Arc-Length Beams under a Point Load. *Journal of Structural Engineering* **123**(7), pp. 968-970.
- [2] Wang, C.M., Lam, K.Y., He, X.Q. and Chucheepsakul, S., (1997). Large Deflections of an End Supported Beam Subjected to a Point Load. *International Journal of Nonlinear Mechanics* **32**, pp. 63-72.
- [3] Athisakul, C. and Chucheepsakul, S. (2008). Effect of Inclination on Bending of Variable-Arc-Length-Beams Subjected to Uniform Self-Weight. *Engineering Structure* **30**, pp. 902-908.
- [4] Zhang, X. and Yang, J. (2005). Inverse Problem of Elastica of a Variable-Arc-Length Beam Subjected to a Concentrated Load. *Acta Mechanica Sinica* **21**, pp. 444-450.
- [5] Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Huang, T. (1995). Elastica of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to End Moment. *Journal of Engineering Mechanics* **121**, pp. 767-772.
- [6] Chucheepsakul, S. and Huang, T. (1992). Finite Element Solution of Large Deflection Analysis of a Class of Beams. *Proceedings of Computer Methods in Engineering: Advance and Applications* **1**, pp. 45-50.
- [7] Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S. (2018). Postbuckling Behavior of Variable-Arc-Length Elastica Connected with a Rotational Spring Joint Including the Effect of Configurational Force. *Meccanica* **53** (10), pp. 2619-2636.
- [8] Chucheepsakul, S. and Phungpaingam, B., (2004). Elliptic Integral Solution of Variable-Arc-Length Elastica under an Inclined Follower Force. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **84**, pp. 29-38.
- [9] การันต์ คล้ายฉ่ำ, ชัยณรงค์ อธิสกุล และ สมชาย ชูชีพสกุล (2559). ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์หาแรงดัดวิกฤตของท่อลำเลียงของไหลได้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว. *วารสารวิจัยและพัฒนา มจร.*, ปีที่ 37, ฉบับที่ 4, หน้า 429-445.
- [10] Chucheepsakul, S. and Monprapussorn, T. (2000). Divergence Instability of Variable-Arc-Length Elastica Pipes Transporting Fluid. *Journal of Fluids and Structures* **14**, 895-916.
- [11] Athisakul, C., Phungpaingam, B., Chatanin, W., and Chucheepsakul, S. (2012). Critical weight of flexible pipe conveying fluid subjected to end moments, *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering* **5** (2), 90-94.
- [12] Athisakul, C., Monprapussorn, T., Chucheepsakul, S. (2011) A variational formulation for three-dimensional analysis of extensible marine riser transporting fluid. *Ocean Engineering* **38**(4), 609-620.
- [13] ธนกร ริมา, ปณิธาน ปัดทุมแผง และวิชญ์วัชร นาทาบารุง (2562). การแอ่นตัวมากของท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้. วิทยานิพนธ์ปริญญาตรี. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, ประเทศไทย.