

ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์และการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบ รูปทรงห้วงยางรับแรงดัน

Nonlinear Static Response and Free Vibration of Pressurized Semi-Torus Shell

คมกร ไชยเดชาธร¹ จีรศักดิ์ สุพรมวัน² กิ่งสมร ทิพย์โยธา³ และ วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา^{4,*}

^{1,2,3,4} สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี จ.นครราชสีมา

*Corresponding author; E-mail address: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์และการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ ฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างได้โดยใช้หลักการของงานเสมือนในทอมของค่าการเสียรูป การหาค่าการเสียรูปและค่าความถี่ธรรมชาติจะสามารถทำได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลการศึกษาเชิงตัวเลขพบว่ารูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันคงที่จะเกิดลักษณะความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูปที่จุดบนสุดของโครงสร้าง นอกจากนี้ยังพบว่าค่าการเปลี่ยนแปลงค่าของความหนา และความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทจะส่งผลกระทบต่อค่าการเสียรูปและค่าความถี่ธรรมชาติ

คำสำคัญ: ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์, การสั่นอิสระ, โครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยาง, หลักการของงานเสมือน, วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Abstract

This paper presents the nonlinear static response and free vibration of pressurized semi-torus shell by using differential geometry. Energy functional of pressurized semi-torus shell system can be performed by principle of virtual work. Deformed configuration and natural frequencies of pressurized semi-torus shell can be obtained by finite element method. Numerical results indicate that the deformed configuration has a discontinuity at the apex point of pressurized semi-torus shell. Moreover, the changes of thickness and cross-sectional radius have a large effect on the deformed configurations and natural frequencies.

Keywords: nonlinear static response, free vibration, pressurized semi-torus shell, principle of virtual work, finite element method

1. คำนำ

โครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดัน (pressurized semi-torus shell) จะมีลักษณะแตกต่างจากโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนทั่วไปคือจะไม่มีการตัดกันรอบแกนหมุน (axis of revolution) นิยมใช้ในภาคอุตสาหกรรมเช่น ถังบรรจุไฮโดรเจนเหลว, ท่อยึดลมร้อน, เรือดำน้ำ และยางสำหรับรถยนต์หรือเครื่องบิน เป็นต้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันจะเริ่มต้นจากงานวิจัยของ Timoshenko and Woinowsky-Krieger [1], Flügge [2], Sanders and Liepins [3], Young and Budynas [4], วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา [5] โดยเป็นการศึกษาการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางแบบเต็มใบ Wilson et al. [6] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางติดตั้งใต้ทะเลโดยใช้ทฤษฎีเซลล์แบบเชิงเส้น หลังจากนั้นงานวิจัยของวีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา และคณะ [7] ได้เสนอผลตอบสนองแบบเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางแบบครึ่งใบติดตั้งใต้ทะเลโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน สำหรับวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางรับแรงดันจะเริ่มจากงานวิจัยของ Liepins [8] ที่ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ในการแก้ปัญหามสมการควบคุม (governing equation) เพื่อหาความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นต่อมา Jha et al. [9] ได้ใช้วิธีของกาลอร์คิน (Galerkin's method) ในการหาค่าตอบและเปรียบเทียบกับผลของ Liepins [8] นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยของ Balderes and Armenakas [10] และ Wang et al. [11] ที่ใช้วิธี Runge-Kutta และ differential quadrature ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่น ตามลำดับ

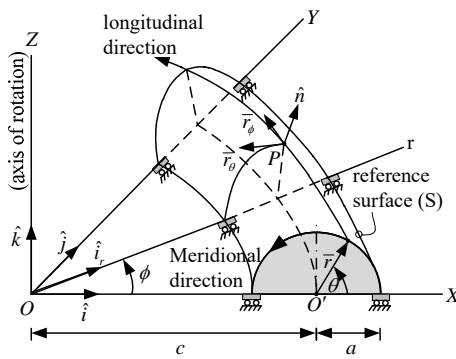
จากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตพบว่าการศึกษเกี่ยวกับพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันยังมีน้อยมากเมื่อเทียบกับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยางแบบเต็มใบ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อหาผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์และการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดัน โดยการจำลองโครงสร้างที่ตำแหน่งอควเตอร์เป็นแบบสมมาตรครึ่งใบหรือเรียกว่าฐานรองรับแบบสไลเดอร์ (slider boundary condition)

2. แบบจำลองของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยาง

2.1 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยาง

พิจารณารูปที่ 1 กำหนดให้ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห้วงยาง และความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปทรงห้วงยางมีค่าเท่ากับ a และ c ตามลำดับ ภายใต้แรงดันที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอเท่ากันตลอดหน้าตัดที่สภาวะอ้างอิงจะสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\left(c - \sqrt{X^2 + Y^2}\right)^2 + Z^2 = a^2 \quad (1)$$



รูปที่ 1 ระยะพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบ

โดยที่ (X, Y, Z) คือระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate) ซึ่งสามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$X = (c + a \cos \theta) \cos \phi \quad (2)$$

$$Y = (c + a \cos \theta) \sin \phi \quad (3)$$

$$Z = a \sin \theta \quad (4)$$

ค่าเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวอ้างอิง (\bar{r}) และพื้นผิวหลังการเสียรูปหรือการสั้น (\bar{R}) จะสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\bar{r} = r \cos \phi \hat{i} + r \sin \phi \hat{j} + Z \hat{k} \quad (5)$$

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} u + \hat{n} w \quad (6)$$

โดยที่ $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวพิกัดฉาก และ (u, w) คือค่าการเสียรูปตามแนวเส้นเมริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมริเดียน ตามลำดับ สำหรับค่าความเร็วและความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทจะสามารถหาได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (6) เทียบกับเวลาจะได้ดังสมการ

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} \dot{u} + \hat{n} \dot{w} \quad (7)$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} \ddot{u} + \hat{n} \ddot{w} \quad (8)$$

จากหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) [12] สามารถคำนวณส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (metric tensor) ได้จากสมการ

$$E = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\theta = a^2 \quad (9)$$

$$F = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\phi = 0 \quad (10)$$

$$G = \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}_\phi = (c + a \cos \theta)^2 \quad (11)$$

และส่วนประกอบของเมตริกซ์ความโค้ง (metric curvature) ได้จากสามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$e = \bar{r}_{\theta\theta} \cdot \hat{n} = a \quad (12)$$

$$f = \bar{r}_{\theta\phi} \cdot \hat{n} = 0 \quad (13)$$

$$g = \bar{r}_{\phi\phi} \cdot \hat{n} = (R + a \cos \theta) \cos \theta \quad (14)$$

โดยที่ \hat{n} คือเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวอ้างอิง สามารถนิยามได้จากสมการ

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi}{|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi|} = \frac{-r Z_\theta \cos \phi \hat{i} - r Z_\theta \sin \phi \hat{j} + r r_\theta \hat{k}}{D} \quad (15)$$

$$\text{โดยที่ } D = \sqrt{EG - F^2}$$

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป

พิจารณาความยาวชิ้นส่วนใด ๆ บนพื้นผิวที่สถานะเริ่มต้นปราศจากความเครียดและหลังการเสียรูปหรือการสั้น จะสามารถนิยามได้จากค่าความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ (total Lagrange strains) ดังสมการ

$$\varepsilon_\theta^L = \frac{1}{2} \left(\frac{E^*}{E_0} - 1 \right) \quad (16)$$

$$\varepsilon_\phi^L = \frac{1}{2} \left(\frac{G^*}{G_0} - 1 \right) \quad (17)$$

จากสมการที่ (16) และ (17) จะสามารถเขียนได้ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\{\varepsilon^L\} = [T] (\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}) \quad (18)$$

เมื่อ $(\{\varepsilon_0\}, \{\varepsilon\})$ คือค่าความเครียดเริ่มต้นแบบออยเลอร์ (initial Eulerian strains) และค่าความเครียดเพิ่มขึ้น (added strains) ตามลำดับ

3. ฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้าง

เราสามารถเขียนฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างได้โดยใช้หลักการของงานเสมือนในทอมของค่าการเสียรูป โดยเป็นผลรวมของพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายใน และงานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้าง จากหลักการของงานเสมือน [13] จะได้ผลรวมของงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงทรงแฉกรับแรงดันดังสมการ

$$\delta U + \delta \Omega - \delta I = 0 \quad (19)$$

3.1 พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

โครงสร้างเปลือกบางที่มีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น และความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง (h) มีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูปหรือการสั่น จะสามารถเขียนค่าพลังงานความเครียดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \{\epsilon^L\}^T [C] \{\epsilon^L\} h D_0 d\phi d\theta \quad (20)$$

โดยที่ $[C]$ คือเมทริกซ์คุณสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$[C] = \frac{E'}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{และ } D_0 = D \sqrt{(1-2\epsilon_{\theta\theta})(1-2\epsilon_{\phi\phi})}$$

3.2 พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายใน

พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายในเป็นแบบอนุรักษ์ (conservative force) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\Omega = -\frac{P_0}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (\bar{R}_\theta \times \bar{R}_\phi \cdot \bar{R} - \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}) d\phi d\theta \quad (22)$$

โดยที่ p_0 คือค่าแรงดันภายในคงที่

3.3 งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้าง

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta I = -2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho \ddot{u} \{\delta u\} + \rho \ddot{w} \{\delta w\}) h D d\theta \quad (23)$$

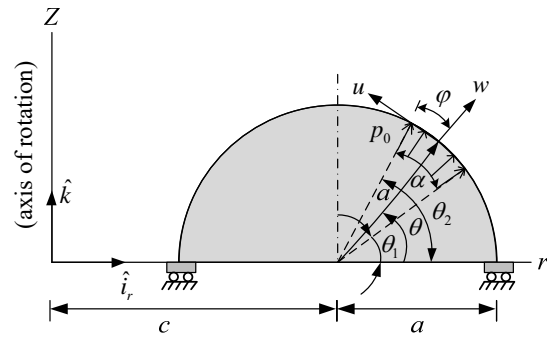
โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของวัสดุ และ (\ddot{u}, \ddot{w}) คือองค์ประกอบสำหรับเวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน และแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ

4. วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [14-18] ทำได้โดยการจำลองโครงสร้างเปลือกบางด้วยชิ้นส่วนของคาน 1 มิติ และแบ่งเป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยมีค่าดังสมการ

$$\{g\} = [\psi] \{d\} \quad (24)$$

โดยที่ $[\psi]$ คือเมทริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม และ $\{d\}$ คือเวกเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ



รูปที่ 2 การแบ่งชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบ

ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (20), (22) และ (23) และจัดรูปใหม่โดยใช้สมการที่ (19) จะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$[m] \{\dot{d}\} + [k] \{d\} = \{f\} \quad (25)$$

โดยที่ $[m]$ คือเมทริกซ์มวลของชิ้นส่วนย่อย, $[k]$ คือเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย, $\{f\}$ คือเวกเตอร์แรงของชิ้นส่วนย่อย สามารถนิยามได้ดังสมการ

$$[m] = 2\pi \{\delta u\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T h D d\theta + 2\pi \{\delta w\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T h D d\theta \quad (26)$$

$$[k] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left[[k] + \frac{1}{2} [n^1] + \frac{1}{3} [n^2] \right] [\psi] h D d\theta + \frac{P_0}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left[[v^K] + \frac{1}{2} [v^N] \right] [\psi] d\theta \quad (27)$$

$$\{f\} = \frac{P_0}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \{v^c\} d\theta \quad (28)$$

แต่เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ (local degree of freedom) เหมือนกับ ดีกรีอิสระรวม (global degree of freedom) ดังนั้นสมการที่ (25) จะสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{F\} \quad (29)$$

จากสมการที่ (29) จะสามารถคำนวณหาค่าการเสียรูปทางสถิตศาสตร์ได้จาก $[K]\{D\} = \{F\}$ และค่าความถี่ธรรมชาติได้จากสมการ

$$|[K] - \omega_n^2 [M]| = 0 \quad (30)$$

เมื่อ ω_n คือความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดัน เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันที่มีความสมมาตรตามแนวแกนรัศมีถูกนำมาพิจารณา ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งอิกวเอเตอร์ด้านใน (intrados equator) และด้านนอก (extrados equator) ของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงโดมจะเป็นลักษณะสไลด์เออร์มีค่าดังนี้

$$u = w_\theta = 0 \quad (31)$$

5. ผลการศึกษา

การศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันในบทความนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์ กับการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดัน ซึ่งจะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1 ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์

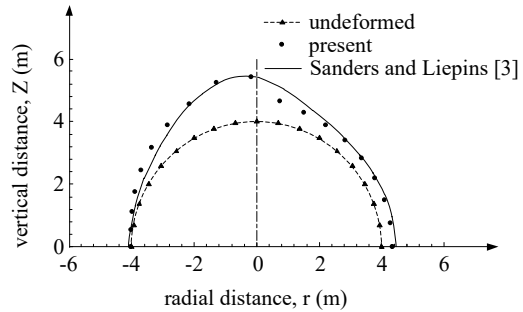
ในการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นจะเริ่มต้นจากการตรวจสอบค่าการลู่เข้าของจำนวนขั้นส่วนย่อยโดยเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Sanders and Liepins [3] ซึ่งมีสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ $c = 6$ ม., $a = 4$ ม., $h = 0.075$ ม., $p_0 = 5 \times 10^6$ นิวตัน/ตร.ม., $E' = 200 \times 10^9$ นิวตัน/ตร.ม. และ $\mu = 0.3$ พบว่าค่าการเสียรูปในแนวรัศมีที่ตำแหน่งอิกวเอเตอร์ด้านในและด้านนอกที่ได้จากงานวิจัยนี้คือ 0.026675 และ 0.346605 ซม. ตามลำดับ จากนั้นทำการเปรียบเทียบกับสูตรของ Roark [4] ดังสมการ

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{p_0 a}{E' t} [r - \nu(r + c)] \quad (32)$$

ซึ่งคำนวณได้เท่ากับ 0.026667 และ 0.346667 ซม. ตามลำดับสำหรับค่าการเสียรูปในแนวรัศมีที่ตำแหน่งอิกวเอเตอร์ด้านในและด้านนอก ดังนั้นร้อยละความแตกต่างจะอยู่ที่ 0.03 และ 0.02 ตามลำดับ โดยทั้งหมดจะมีค่าน้อยกว่าร้อยละ 0.05 แสดงว่าคำตอบที่ได้จากงานวิจัยนี้มีความถูกต้องสูงมาก

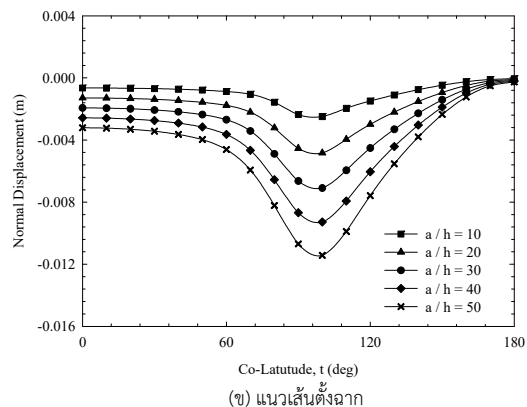
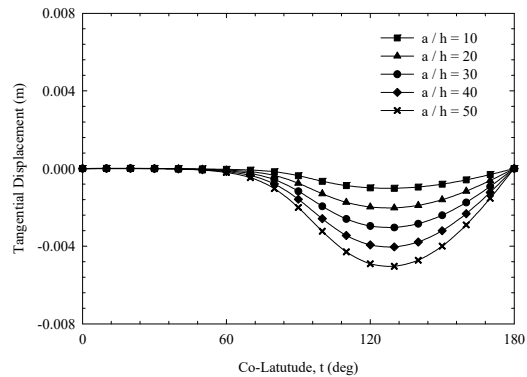
การเปรียบเทียบรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันที่สภาวะหลังการเสียรูปกับงานวิจัยของ Sanders and Liepins [3] ดังแสดงในรูปที่ 3 พบว่ามีค่าการเสียรูปมีลักษณะใกล้เคียงกัน แต่จะมีความแตกต่างกันในบริเวณจุดบนสุดของโครงสร้าง ($\theta = 90^\circ$) เนื่องจากเป็นปัญหาที่ไม่สามารถของหาค่าได้ (singularity) ในเทอมของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป (strain-displacement

relations) ซึ่งทำให้เกิดลักษณะความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูปดังที่ได้อธิบายในงานวิจัยของ Vick and Gramoll [19]

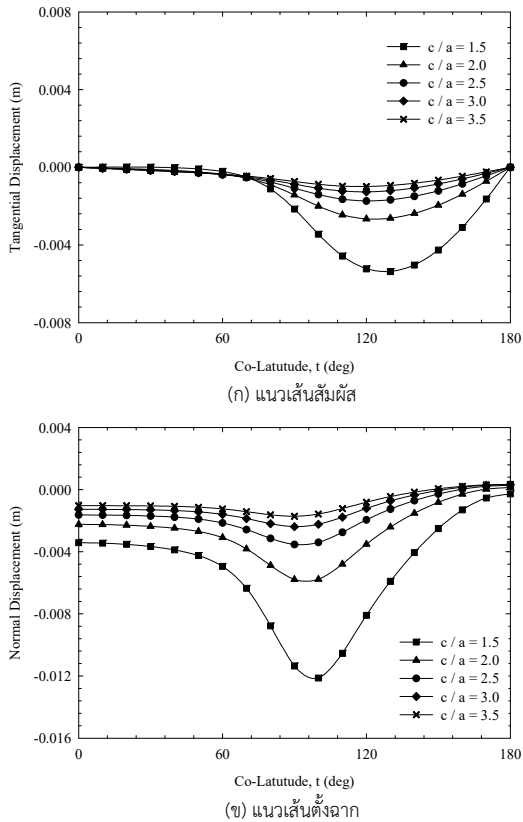


รูปที่ 3 รูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันที่สภาวะหลังการเสียรูป (ตัวคูณขยายการเสียรูป = 100)

รูปที่ 4 แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาที่มีต่อค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสกับแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดัน โดยการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนของ a/h พบว่าเมื่อค่าอัตราส่วน a/h มีค่าสูงขึ้นจะส่งผลให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้นไปด้วย เพราะโครงสร้างดังกล่าวจะมีสติเฟเนสลดลงเนื่องจากค่าความหนาของโครงสร้างลดลง ในขณะที่ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนของ c/a จะพบว่ามีผลแตกต่างจากกรณีของการอัตราส่วนของ a/h นั่นคือค่าการเสียรูปจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่ออัตราส่วนของ c/a มีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 5 เนื่องจากค่าสติเฟเนสลดลงในขณะที่หน้าตัดของโครงสร้างใหญ่ขึ้น



รูปที่ 4 ผลของอัตราส่วนของ a/h ที่มีต่อค่าการเสียรูป



รูปที่ 5 ผลของอัตราส่วนของ c/a ที่มีต่อค่าการเสียรูป

5.2 การสันนิษฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้น

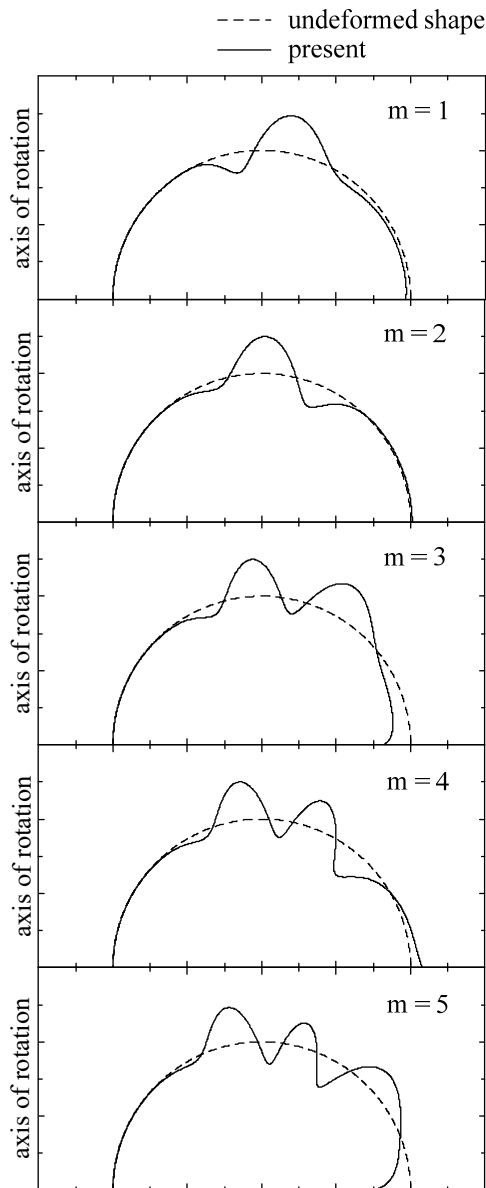
จากการศึกษาผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิติศาสตร์พบว่า โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ครั้งนี้ให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพึงพอใจ ดังนั้นในการหาค่าการสันของโครงสร้างการวิเคราะห์การสันอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันจะสามารถทำได้โดยใช้สมบัติ *สมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ* $c = 6$ ม., $a = 4$ ม., $h = 0.01$ ม., $\rho = 7850$ กก./ลบ.ม., $p_0 = 1 \times 10^6$ นิวตัน/ตร.ม., $E' = 200 \times 10^9$ นิวตัน/ตร.ม. และ $\mu = 0.3$ ทำการทดสอบการลู่เข้าของค่าความถี่ธรรมชาติ เพื่อหาจำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่เหมาะสม ดังแสดงในตารางที่ 1 เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าความถูกต้องสูงสุด โดยพบว่าถ้าใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยระหว่าง 60 กับ 70 ชิ้นส่วนจะให้ค่าถูกต้องสูงสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสันที่ 1 ถึง 5 ไม่เกินร้อยละ 0.50 เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยสูงกว่านี้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จะเลือกใช้แบบจำลองที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 60 ชิ้นส่วนเท่านั้น จากนั้นนำมาพล็อตกราฟความสัมพันธ์ของโหมดการสันอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันดังแสดงในรูปที่ 6

ตารางที่ 1 ค่าการลู่เข้าของค่าความถี่ธรรมชาติกับจำนวนชิ้นส่วนย่อย

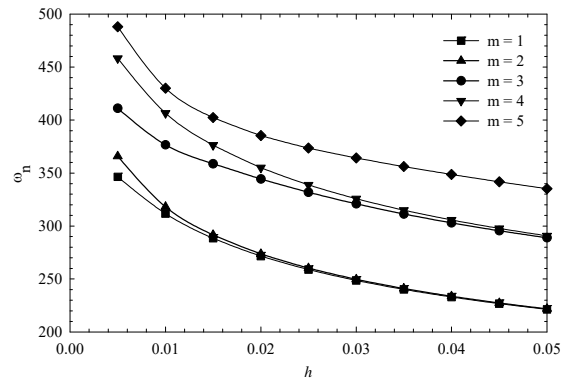
โหมดที่	จำนวนชิ้นส่วนย่อย	ค่าความถี่ธรรมชาติ (เรเดียน/วินาที)	ความแตกต่าง (ร้อยละ)
1	10	261.92	-13.97
	20	304.44	-1.61
	30	309.41	-0.46
	40	310.85	-0.20
	50	311.46	-0.10
	60	311.77	-0.06
	70	311.96	-0.04
2	10	302.76	-2.33
	20	309.99	-1.81
	30	315.70	-0.48
	40	317.22	-0.19
	50	317.84	-0.10
	60	318.14	-0.05
	70	318.31	-0.03
3	10	313.80	-9.04
	20	344.98	-5.46
	30	364.89	-1.93
	40	372.08	-0.80
	50	375.08	-0.41
	60	376.63	-0.24
	70	377.54	-0.16
4	10	357.05	-5.15
	20	376.45	-5.17
	30	396.96	-1.55
	40	403.23	-0.56
	50	405.51	-0.26
	60	406.59	-0.15
	70	407.18	-0.09
5	10	391.47	1.40
	20	386.06	-5.35
	30	407.90	-2.83
	40	419.79	-1.58
	50	426.51	-0.84
	60	430.13	-0.49
	70	432.23	-0.31

การศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงดันที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ พบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างจะส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติโดยตรง ดังแสดงในรูปที่ 7 สำหรับทุกโหมดการสันของโครงสร้างนั้นคือเมื่อ

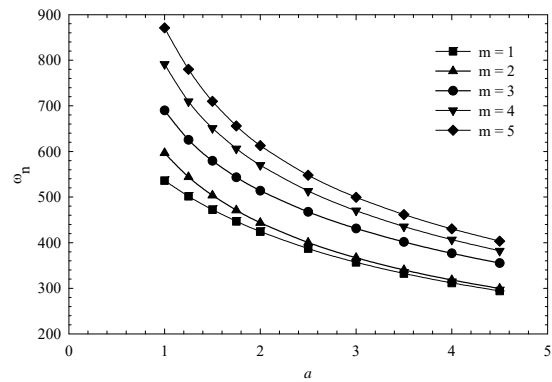
ความหนาของโครงสร้างเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 6 นอกจากนี้ยังพบว่าที่ความหนาสูง ๆ ส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 และ 2 มีค่าเข้าหากัน ซึ่งรวมไปถึงโหมดการสั่นที่ 3 และ 4 ที่ให้ผลลัพธ์ในลักษณะเช่นเดียวกับโหมดการสั่นลำดับที่ 1 และ 2 รูปที่ 8 แสดงให้เห็นว่าเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห้วงยางมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงด้นมีค่าลดลง กล่าวคือค่าความชันของค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห้วงยางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และมีค่าความชันของค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห้วงยางมีค่าลดลง



รูปที่ 6 โหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงด้น



รูปที่ 7 ผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 8 ผลของการเปลี่ยนแปลงความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห้วงยางที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

6. บทสรุป

บทความนี้เป็นการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงด้นในบทความนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์ กับการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห้วงยางรับแรงด้น โดยใช้หลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และหลักการของงานเสมือนในการสร้างฟังก์ชันพลังงานและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข ซึ่งจากผลการศึกษาพบว่า ค่าระยะการเสถียรสูงสุดในแนวเส้นสัมผัสกับแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงด้นรูปทรงโดนัทจะเกิดขึ้นที่จุดสูงสุดและต่ำสุดในช่วงบริเวณด้านในของโครงสร้าง สำหรับค่าพารามิเตอร์ทั้งสองค่า ได้แก่ความหนาและความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห้วงยางจะส่งผลโดยตรงต่อการเสถียรรูปและค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสานที่ได้สนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Companies.
- [2] Flügge, W. (1960). *Stresses in Shells*. Springer.
- [3] Sanders Jr, J.L., and Liepins, A. (1963). Toroidal membrane under internal pressure. *AIAA Journal*. 1(9), pp. 2105-2110.
- [4] Young, W.C. and Budynas. R.G. (2002). *Roark's formulas for stress and strain*, 7th ed., McGraw-Hill.
- [5] วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา (2559). การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันจากภายนอกโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อบ.*, ปีที่ 9, ฉบับที่ 2, หน้า 47-56.
- [6] Wilson, E.L., Hsueh, T.M. and Jones, J.R. (1971). Nonlinear analysis of deep ocean structures. In Proc., 1971 Symp. of the Int. Association for Shell Structures Pacific Symp., University of Press of Hawaii, pp. 457-474.
- [7] วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา, กมล ตริ่มอง และ จิระยุทธ สืบสุข (2560). การวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางสำหรับเก็บของเหลวภายใต้แรงดันน้ำสถิตสูงมาก. *วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ*, ปีที่ 12, ฉบับที่ 2, หน้า 36-47.
- [8] Liepins, A.A. (1965). Free vibrations of prestressed toroidal membrane, *AIAA Journal*, 3(10), pp. 1924-1933.
- [9] Jha, A.K., Inman, D.J. and Plaut, R.H. (2002). Free vibration analysis of an inflated toroidal shell. *Journal of Vibration and Acoustics*. 124(3), pp. 387-396.
- [10] Balderes, T. and Armenakas, A.E. (1973). Free vibration of ring-stiffened toroidal shells, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 11(12), pp. 1637-1644.
- [11] Wang, X.H. Xu, B. and Redekop, D. (2006). Theoretical natural frequencies and mode shapes for thin and thick curved pipes and toroidal shells. *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2), pp. 424-434.
- [12] Langhaar, H.L. (1964). *Foundations of Practical Shell Analysis*. Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, United States.
- [13] Langhaar, H.L. (1962). *Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons.
- [14] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Witt, R.J. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.
- [15] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T. (2014). Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume. *Engineering Structures*, 68, pp. 111-120.
- [16] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T. (2015). Parametric study of an equatorially anchored deepwater fluid-filled periodic symmetric shell with constraint volume. *Journal of Engineering Mechanics*, 141, pp. 04015019.
- [17] Jiammeepreecha, W. and Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139, pp. 051016.
- [18] Jiammeepreecha, W. and Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. *Thin-Walled Structures*, 116, pp. 12-18.
- [19] Vick, M.J. and Gramoll, K. (2012). Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 134, pp. 051201.