Nonlinear Static Response and Free Vibration of Pressurized Semi-Torus Shell

1 2 3 4,*

[1,2,3,4] สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน จ.นครราชสีมา
*Corresponding author; E-mail address: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

บทความนี้เสนอผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์และการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ ฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างได้โดยใช้หลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูป การหาค่าการเสียรูปและค่าความถี่ธรรมชาติจะสามารถทำได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลการศึกษาเชิงตัวเลขพบว่ารูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันคงที่จะเกิดลักษณะความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูปที่จุดบนสุดของโครงสร้าง นอกจากนั้นยังพบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าของความหนา และความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงโดนัทจะส่งผลกระทบโดยตรงต่อค่าการเสียรูปและค่าความถี่ธรรมชาติ

คำสำคัญ: ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์, การสั่นอิสระ, โครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยาง, หลักการของงานเสมือน, วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Abstract

This paper presents the nonlinear static response and free vibration of pressurized semi-torus shell by using differential geometry. Energy functional of pressurized semi-torus shell system can be performed by principle of virtual work. Deformed configuration and natural frequencies of pressurized semi-torus shell can be obtained by finite element method. Numerical results indicate that the deformed configuration has a dis-continuity at the apex point of pressurized semi-torus shell. Moreover, the changes of thickness and cross-sectional radius have a large effect on the deformed configurations and natural frequencies.

Keywords: nonlinear static response, free vibration, pressurized semi-torus shell, principle of virtual work, finite element method

1.

โครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน (pressurized semi-torus shell) จะมีลักษณะแตกต่างจากโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนทั่วไปคือจะไม่มีการตัดกันรอบแกนหมุน (axis of revolution) นิยมใช้ในภาคอุตสาหกรรมเช่น ถังบรรจุปิโตรเลียมเหลว, ท่อยืดลมร้อน, เรือดำน้ำ และยางสำหรับรถยนต์หรือเครื่องบิน เป็นต้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันจะเริ่มต้นจากงานวิจัยของ Timoshenko and Woinowsky-Krieger [1], Flügge [2], Sanders and Liepins [3], Young and Budynas [4], วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา [5] โดยเป็นการศึกษาค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางแบบเต็มใบ Wilson et al. [6] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางติดตั้งใต้ทะเลโดยใช้ทฤษฎีเชลล์แบบเชิงเส้น หลังจากนั้นงานวิจัยของวีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา และคณะ [7] ได้เสนอผลตอบสนองแบบเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางแบบครึ่งใบติดตั้งใต้ทะเลโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน สำหรับวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติและและโหมดการสั่นอิสระของของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางรับแรงดันจะเริ่มจากงานวิจัยของ Llepins [8] ที่ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ในการแก้ปัญหาสมการควบคุม (governing equation) เพื่อหาความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นต่อมา Jha et al. [9] ได้ใช้วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin's method) ในการหาคำตอบและเปรียบเทียบกับผลของ Llepins [8] นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยของ Balderes and Armenakas [10] และ Wang et al. [11] ที่ใช้วิธี Runge-Kutta และ differential quadrature ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่น ตามลำดับ

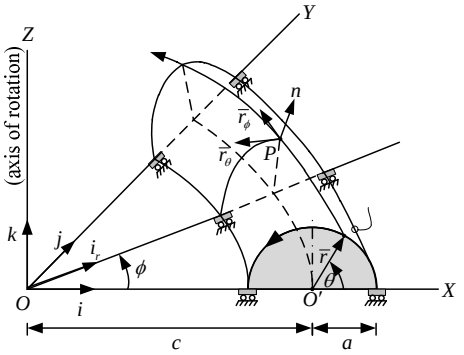
จากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตพบว่าการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันยังมีน้อยมากเมื่อเทียบกับโครงสร้างโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางแบบเต็มใบ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อหาผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์และการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน โดยการจำลองโครงสร้างที่ตำแหน่งอิเควเตอร์เป็นแบบสมมาตรครึ่งใบหรือเรียกว่าฐานรองรับแบบสไลเดอร์ (slider boundary condition)

2.

2.1 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยาง

พิจารณารูปที่ 1 กำหนดให้ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยาง และความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปทรงห่วงยางมีค่าเท่ากับ a และ c ตามลำดับ ภายใต้แรงดันที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอเท่ากันตลอดหน้าตัดที่สภาวะอ้างอิงจะสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\left(c-\sqrt{X \quad +Y}\right) \quad +Z \quad =a \tag{1}$$



1 ระยะพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบ

โดยที่ $(X \; Y \; Z)$ คือระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate) ซึ่งสามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$X = \; c+a \quad \theta \quad \phi \tag{2}$$
$$Y = \; c+a \quad \theta \quad \phi \tag{3}$$
$$Z = a \quad \phi \tag{4}$$

ค่าเวคเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวอ้างอิง $(\bar{r})$ และพื้นผิวหลังการเสียรูปหรือการสั่น $(\bar{R})$ จะสามารถนิยามได้ดังสมการ

$$\bar{r} = r \quad \phi i + r \quad \phi \, j + Z \, k \tag{5}$$
$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} u + nw \tag{6}$$

โดยที่ $(i \;\; j \;\; k)$ คือเวคเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวพิกัดฉาก และ $(u \;\; w)$ คือค่าการเสียรูปตามแนวเส้นเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ สำหรับค่าความเร็วและความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทจะสามารถหาได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (6) เทียบกับเวลาจะได้ดังสมการ

$$\bar{v} = \bar{R} = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} u + nw \tag{7}$$

$$\bar{a} = \bar{R} = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}} u + nw \tag{8}$$

จากหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) [12] สามารถคำนวณส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (metric tensor) ได้จากสมการ

$$E = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\theta = a \tag{9}$$
$$F = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\phi = \tag{10}$$
$$G = \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}_\phi = \; c+a \quad \theta \tag{11}$$

และส่วนประกอบของเมตริกซ์ความโค้ง (metric curvature) ได้จากสามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$e = \bar{r}_{\theta\theta} \cdot n = a \tag{12}$$
$$f = \bar{r}_{\theta\phi} \cdot n = \tag{13}$$
$$g = \bar{r}_{\phi\phi} \cdot n = \; R+a \quad \theta \quad \theta \tag{14}$$

โดยที่ n คือเวคเตอร์ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวอ้างอิง สามารถนิยามได้จากสมการ

$$n = \frac{\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi}{\left|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi\right|} = \frac{-rZ_\theta \quad \phi i - rZ_\theta \quad \phi \, j + rr_\theta \, k}{D} \tag{15}$$

โดยที่ $D = \sqrt{EG - F}$

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป

พิจารณาความยาวชิ้นส่วนใด ๆ บนพื้นผิวที่สถานะเริ่มต้นปราศจากความเครียดและหลังการเสียรูปหรือการสั่น จะสามารถนิยามได้จากค่าความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ (total Lagrange strains) ดังสมการ

$$\varepsilon_\theta^L = -\left(\frac{E}{E} - \right) \tag{16}$$

$$\varepsilon_\phi^L = -\left(\frac{G}{G} - \right) \tag{17}$$

จากสมการที่ (16) และ (17) จะสามารถเขียนได้ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\varepsilon^L \; = T \left(\varepsilon \quad + \varepsilon \right) \tag{18}$$

เมื่อ $(\varepsilon \quad \varepsilon)$ คือค่าความเครียดเริ่มต้นแบบออยเลอร์ (initial Eulerian strains) และค่าความเครียดเพิ่มขึ้น (added strains) ตามลำดับ

3.

เราสามารถเขียนฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างได้โดยใช้หลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูป โดยเป็นผลรวมของพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายในและงานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้าง จากหลักการของงานเสมือน [13] จะได้ผลรวมของงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันดังสมการ

$$\delta U + \delta \Omega - \delta I = \tag{19}$$

3.1 พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

โครงสร้างเปลือกบางที่มีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น และความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง (h) มีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูปหรือการสั่น จะสามารถเขียนค่าพลังงานความเครียดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$U = -\int_{\theta}^{\theta} \int^{\pi} \varepsilon^{L\ T} [C]\ \varepsilon^{L}\ h D\ d\phi d\theta \tag{20}$$

โดยที่ $[C]$ คือเมตริกซ์คุณสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$C = \frac{E'}{-\mu} \begin{bmatrix} & \mu \\ \mu & \end{bmatrix} \tag{21}$$

และ $D = D\sqrt{-\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\phi}}$

3.2 พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายใน

พลังงานศักย์ของแรงดันจากภายในเป็นแรงแบบอนุรักษ์ (conservative force) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\Omega = -\frac{p}{} \int_{\theta}^{\theta} \int^{\pi} \left(\bar{R}_{\theta} \times \bar{R}_{\phi} \cdot \bar{R} - \bar{r}_{\theta} \times \bar{r}_{\phi} \cdot \bar{r} \right) d\phi d\theta \tag{22}$$

โดยที่ p คือค่าแรงดันภายในคงที่

3.3 งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้าง

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta I = -\pi \int_{\theta}^{\theta} \left(\rho u\ \delta u + \rho w\ \delta w \right) h D\, d\theta \tag{23}$$

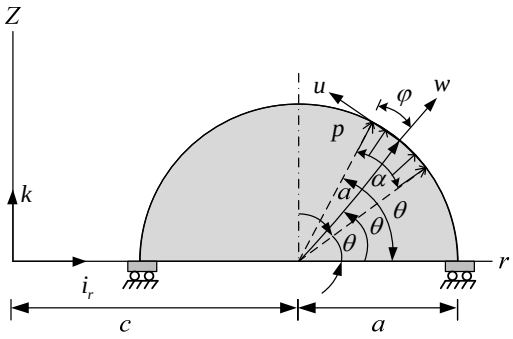
โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของวัสดุ และ $(u\ w)$ คือองค์ประกอบสำหรับเวคเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวเส้นเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ

4.

การแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [14-18] ทำได้โดยการจำลองโครงสร้างเปลือกบางด้วยชิ้นส่วนของคาน 1 มิติ และแบ่งเป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยมีค่าดังสมการ

$$g = \psi\ \ d \tag{24}$$

โดยที่ ψ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม และ d คือเวคเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ



2 การแบ่งชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบ

ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (20), (22) และ (23) และจัดรูปใหม่โดยใช้สมการที่ (19) จะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$[m]\{d\} + [k]\{d\} = \{f\} \tag{25}$$

โดยที่ $[m]$ คือเมตริกซ์มวลของชิ้นส่วนย่อย, $[k]$ คือเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย, $\{f\}$ คือเวคเตอร์แรงของชิ้นส่วนย่อย สามารถนิยามได้ดังสมการ

$$[m] = \pi \{\delta u\}^T \int_{\theta}^{\theta} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T h D\, d\theta + \pi \{\delta w\}^T \int_{\theta}^{\theta} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T h D\, d\theta \tag{26}$$

$$[k] = \int_{\theta}^{\theta} [\psi]^T \left[[k] + -[n] + -[n] \right] [\psi]\, hDd\theta + \frac{p_o}{} \int_{\theta}^{\theta} [\psi]^T \left[[v^K] + -[v^N] \right] [\psi]\, d\theta \tag{27}$$

$$\{f\} = \frac{p_o}{} \int_{\theta}^{\theta} [\psi]^T \{v^c\} d\theta \tag{28}$$

แต่เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ (local degree of freedom) เหมือนกับดีกรีอิสระรวม (global degree of freedom) ดังนั้นสมการที่ (25) จะสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$[M]\{D\}+[K]\{D\}=\{F\} \quad (29)$$

จากสมการที่ (29) จะสามารถคำนวณหาค่าการเสียรูปทางสถิตศาสตร์ได้จาก $[K]\{D\}=\{F\}$ และค่าความถี่ธรรมชาติได้จากสมการ

$$\left|[K]-\omega_n[M]\right|= \quad (30)$$

เมื่อ ω_n คือความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันที่มีความสมมาตรตามแนวแกนรัศมีถูกนำมาพิจารณา ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งอิเควเตอร์ด้านใน (intrados equator) และด้านนอก (extrados equator) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงโดนัทจะเป็นลักษณะสไลเดอร์มีค่าดังนี้

$$u=w_\theta= \quad (31)$$

5.

การศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันในบทความนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์ กับการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน ซึ่งจะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

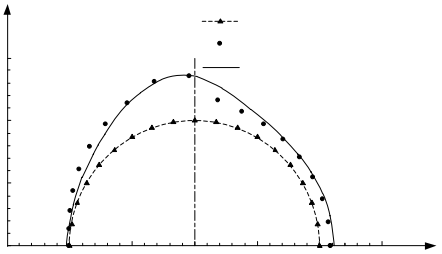
5.1 ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์

ในการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นจะเริ่มต้นจากการตรวจสอบค่าการลู่เข้าของจำนวนชิ้นส่วนย่อยโดยเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Sanders and Liepins [3] ซึ่งมีสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ c = 6 ม., a = 4 ม., h = 0.075 ม., p = 5x10^6 นิวตัน/ตร.ม., E' = 200x10^9 นิวตัน/ตร.ม. และ μ = 0.3 พบว่าค่าการเสียรูปในแนวรัศมีที่ตำแหน่งอิเควเตอร์ด้านในและด้านนอกที่ได้จากงานวิจัยนี้คือ 0.026675 และ 0.346605 ซม. ตามลำดับ จากนั้นทำการเปรียบเทียบกับสูตรของ Roark [4] ดังสมการ

$$\Delta r=-\frac{p\,a}{E't}\left[r-\nu\left(r+c\right)\right] \quad (32)$$

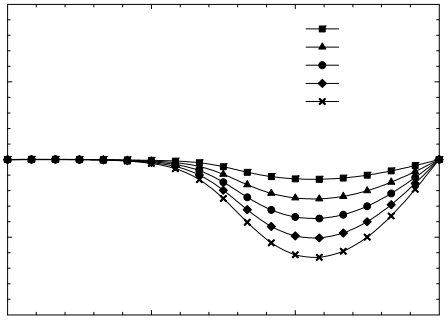
ซึ่งคำนวณได้เท่ากับ 0.026667 และ 0.346667 ซม. ตามลำดับสำหรับค่าการเสียรูปในแนวรัศมีที่ตำแหน่งอิเควเตอร์ด้านในและด้านนอก ดังนั้นร้อยละความแตกต่างจะอยู่ที่ 0.03 และ 0.02 ตามลำดับ โดยทั้งหมดจะมีค่าน้อยกว่าร้อยละ 0.05 แสดงว่าคำตอบที่ได้จากงานวิจัยนี้มีความถูกต้องสูงมาก

การเปรียบเทียบรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันที่สภาวะหลังการเสียรูปกับงานวิจัยของ Sanders and Liepins [3] ดังแสดงในรูปที่ 3 พบว่ามีค่าการเสียรูปมีลักษณะใกล้เคียงกัน แต่จะมีความแตกต่างกันในบริเวณจุดบนสุดของโครงสร้าง (θ = 90°) เนื่องจากเป็นปัญหาที่ไม่สามารถของหาค่าได้ (singularity) ในเทอมของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป (strain-displacement relations) ซึ่งทำให้เกิดลักษณะความไม่ต่อเนื่องของค่าการเสียรูปดังที่ได้อธิบายในงานวิจัยของ Vick and Gramoll [19]

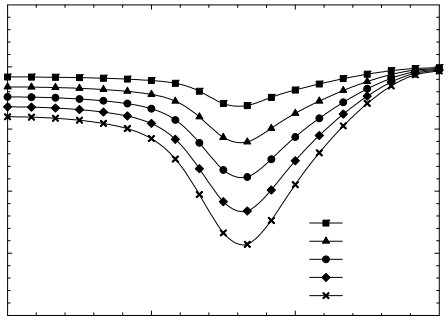


3 รูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันที่สภาวะหลังการเสียรูป (ตัวคูณขยายการเสียรูป = 100)

รูปที่ 4 แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาที่มีต่อค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสกับแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน โดยการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนของ a h พบว่าเมื่อค่าอัตราส่วน a h มีค่าสูงขึ้นจะส่งผลให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้นไปด้วย เพราะโครงสร้างดังกล่าวจะมีสติฟเนสลดลงเนื่องจากค่าความหนาของโครงสร้างลดลง ในขณะที่ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วน c a จะพบว่ามีความแตกต่างจากกรณีของการอัตราส่วนของ a h นั่นคือค่าการเสียรูปจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่ออัตราส่วน c a มีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 5 เนื่องจากค่าสติฟเนสลดลงในขณะที่หน้าตัดของโครงสร้างใหญ่ขึ้น

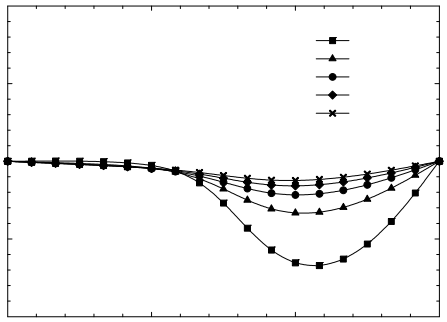


(ก) แนวเส้นสัมผัส

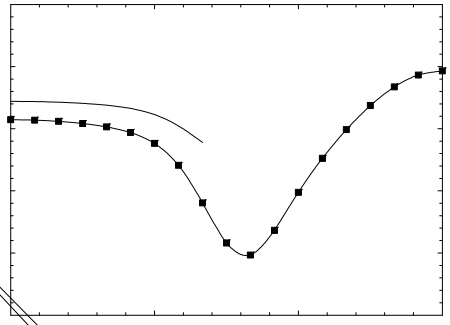


(ข) แนวเส้นตั้งฉาก

4 ผลของอัตราส่วนของ a h ที่มีต่อค่าการเสียรูป



(ก) แนวเส้นสัมผัส



(ข) แนวเส้นตั้งฉาก

5 ผลของอัตราส่วนของ c a ที่มีต่อค่าการเสียรูป

5.2 การสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้น

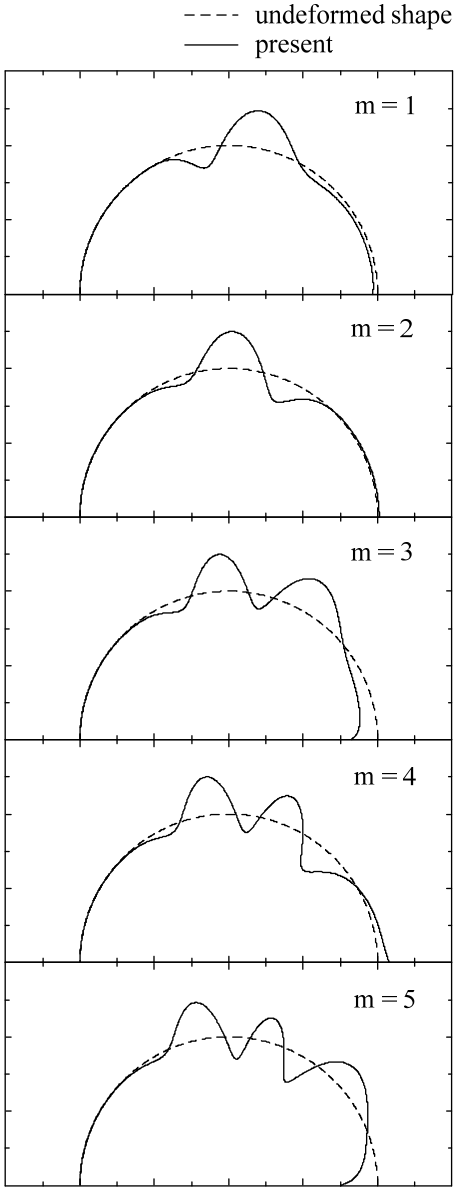
จากการศึกษาผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์พบว่าโปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ครั้งนี้ให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพึงพอใจ ดังนั้นในการหาค่าการสั่นของโครงสร้างการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันจะสามารถทำได้โดยการใช้สมบัติ *สมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ* c = 6 ม., a = 4 ม., h = 0.01 ม., ρ = 7850 กก./ลบ.ม., p = 1x10^6 นิวตัน/ตร.ม., E' = 200x10^9 นิวตัน/ตร.ม. และ μ = 0.3 ทำการทดสอบการลู่เข้าของค่าความถี่ธรรมชาติ เพื่อหาจำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่เหมาะสม ดังแสดงในตารางที่ 1 เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าความถูกต้องสูงสุด โดยพบว่าถ้าใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยระหว่าง 60 กับ 70 ชิ้นส่วนจะให้ค่าถูกต้องสูงสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 ถึง 5 ไม่เกินร้อยละ 0.50 เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยสูงกว่านี้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จะเลือกใช้แบบจำลองที่มีจำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 60 ชิ้นส่วนเท่านั้น จากนั้นนำมาพล็อตกราฟความสัมพันธ์ของโหมดการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันดังแสดงในรูปที่ 6

1 ค่าการลู่เข้าของค่าความถี่ธรรมชาติกับจำนวนชิ้นส่วนย่อย

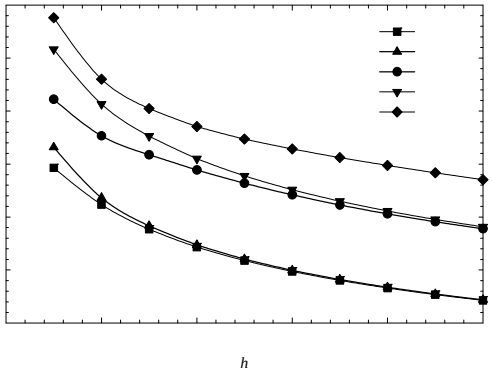
โหมดที่	จำนวนชิ้นส่วนย่อย	ค่าความถี่ธรรมชาติ (เรเดียน/วินาที)	ความแตกต่าง (ร้อยละ)
1	10	261.92	-13.97
	20	304.44	-1.61
	30	309.41	-0.46
	40	310.85	-0.20
	50	311.46	-0.10
	60	311.77	-0.06
	70	311.96	-0.04
2	10	302.76	-2.33
	20	309.99	-1.81
	30	315.70	-0.48
	40	317.22	-0.19
	50	317.84	-0.10
	60	318.14	-0.05
	70	318.31	-0.03
3	10	313.80	-9.04
	20	344.98	-5.46
	30	364.89	-1.93
	40	372.08	-0.80
	50	375.08	-0.41
	60	376.63	-0.24
	70	377.54	-0.16
4	10	357.05	-5.15
	20	376.45	-5.17
	30	396.96	-1.55
	40	403.23	-0.56
	50	405.51	-0.26
	60	406.59	-0.15
	70	407.18	-0.09
5	10	391.47	1.40
	20	386.06	-5.35
	30	407.90	-2.83
	40	419.79	-1.58
	50	426.51	-0.84
	60	430.13	-0.49
	70	432.23	-0.31

การศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ พบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างจะส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติโดยตรง ดังแสดงในรูปที่ 7 สำหรับทุกโหมดการสั่นของโครงสร้างนั่นคือเมื่อ

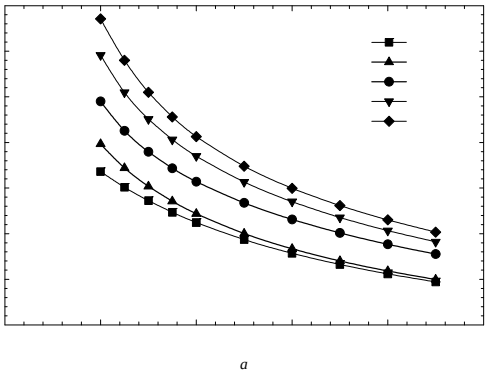
ความหนาของโครงสร้างเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 6 นอกจากนี้ยังพบว่าที่ความหนาสูง ๆ ส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นที่ 1 และ 2 มีค่าลู่เข้าหากัน ซึ่งรวมไปถึงโหมดการสั่นที่ 3 และ 4 ที่ให้ผลลัพธ์ในลักษณะเช่นเดียวกันกับโหมดการสั่นลำดับที่ 1 และ 2 รูปที่ 8 แสดงให้เห็นว่าเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันมีค่าลดลง กล่าวคือค่าความชันของค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และมีค่าความชันของค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางมีค่าลดลง



6 โหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน



7 ผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



8 ผลของการเปลี่ยนแปลงความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

6.

บทความนี้เป็นการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดันในบทความนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ผลตอบสนองไม่เป็นเชิงเส้นทางสถิตศาสตร์ กับการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางครึ่งใบรูปทรงห่วงยางรับแรงดัน โดยใช้หลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และหลักการของงานเสมือนในการสร้างฟังก์ชันพลังงานและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข ซึ่งจากผลการศึกษาพบว่า ค่าระยะการเสียรูปสูงสุดในแนวเส้นสัมผัสกับแนวเส้นตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทจะเกิดขึ้นที่จุดสูงสุดและต่ำสุดในช่วงบริเวณด้านในของโครงสร้าง สำหรับค่าพารามิเตอร์ทั้งสองค่า ได้แก่ความหนาและความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางจะส่งผลโดยตรงต่อค่าการเสียรูปและค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสานที่ได้สนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้

[1] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Companies.

[2] Flügge, W. (1960). *Stresses in Shells*. Springer.

[3] Sanders Jr, J.L., and Liepins, A. (1963). Toroidal membrane under internal pressure. *AIAA Journal*. 1(9), pp. 2105-2110.

[4] Young, W.C. and Budynas. R.G. (2002). *Roark's formulas for stress and strain*, 7th ed., McGraw-Hill.

[5] วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา (2559). การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงโดนัทภายใต้แรงดันจากภายนอกโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อบ.*, ปีที่ 9, ฉบับที่ 2, หน้า 47-56.

[6] Wilson, E.L., Hsueh, T.M. and Jones, J.R. (1971). Nonlinear analysis of deep ocean structures. In Proc., 1971 Symp. of the Int. Association for Shell Structures Pacific Symp., University of Press of Hawaii, pp. 457-474.

[7] วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา, กมล ตรีผอง และ จิระยุทธ สืบสุข (2560). การวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางสำหรับเก็บของเหลวภายใต้แรงดันน้ำสถิตสูงมาก. *วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ*, ปีที่ 12, ฉบับที่ 2, หน้า 36-47.

[8] Liepins, A.A. (1965). Free vibrations of prestressed toroidal membrane, *AIAA Journal*, 3(10), pp. 1924-1933.

[9] Jha, A.K., Inman, D.J. and Plaut, R.H. (2002). Free vibration analysis of an inflated toroidal shell. *Journal of Vibration and Acoustics*. 124(3), pp. 387-396.

[10] Balderes, T. and Armenakas, A.E. (1973). Free vibration of ring-stiffened toroidal shells, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 11(12), pp. 1637-1644.

[11] Wang, X.H. Xu, B. and Redekop, D. (2006). Theoretical natural frequencies and mode shapes for thin and thick curved pipes and toroidal shells. *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2), pp. 424-434.

[12] Langhaar, H.L. (1964). *Foundations of Practical Shell Analysis*. Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, United States.

[13] Langhaar, H.L. (1962). *Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons.

[14] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Witt, R.J. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.

[15] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T. (2014). Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume. *Engineering Structures*, 68, pp. 111-120.

[16] Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T. (2015). Parametric study of an equatorially anchored deepwater fluid-filled periodic symmetric shell with constraint volume. *Journal of Engineering Mechanics*, 141, pp. 04015019.

[17] Jiammeepreecha, W. and Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139, pp. 051016.

[18] Jiammeepreecha, W. and Chucheepsakul, S. (2017). Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. *Thin-Walled Structures*, 116, pp. 12-18.

[19] Vick, M.J. and Gramoll, K. (2012). Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 134, pp. 051201.