

การประเมินเสถียรภาพอีลาสติกที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้แบบปลายยึดแน่นโดยอาศัยแรงภายนอก:

ผลเชิงทฤษฎีและการทดลอง

Stability Evaluation of Clamped – Clamped Variable-Arc-Length Elastica using External

Force: Theory and Experiment

ทีรยุทธ สมสุข^{1*} และ บุญชัย ฝั่งไผ่งาม²

^{1,2} ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี จ.ปทุมธานี

*Corresponding author; Email address: teerayut_s@mail.rmutt.ac.th

Email address: boonchai.p@rmutt.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการศึกษาเสถียรภาพของอีลาสติกภายใต้สนามของแรงโน้มถ่วงของโลก โดยอาศัยแรงในแนวราบกระทำที่กึ่งกลางของอีลาสติก ปลายด้านหนึ่งเป็นแบบยึดแน่นในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งของอีลาสติกสามารถเพิ่มความยาวได้ผ่านจุดรองรับแบบสลีฟ (sleeve support) ที่กึ่งกลางของอีลาสติก มีแรงในแนวราบกระทำเพื่อทดสอบเสถียรภาพของอีลาสติกโดยการสังเกตเครื่องหมายของสติเฟนสของอีลาสติกต่อแรงในแนวราบ สมการอนุพันธ์รอบคลุมปัญหาประกอบไปด้วย สมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อยของอีลาสติก ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์ทางด้านเรขาคณิตของอีลาสติก ผลเฉลยของปัญหาสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธียิงเป้า โดยการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์รอบคลุมปัญหาโดยวิธีเชิงตัวเลขแบบรุงเง-คุดตาให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด ผลที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขจะถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลอง จากการศึกษาพบว่าแรงโน้มถ่วงของโลกซึ่งอยู่ในรูปน้ำหนักของอีลาสติกสามารถทำให้เกิดการสูญเสียเสถียรภาพได้เมื่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้นจนถึงค่าวิกฤติ และจากการทดลองโดยใช้วัสดุแผ่นโพลีคาร์บอเนตที่มีความยืดหยุ่นสูงให้ค่าสอดคล้องและเป็นไปตามผลการคำนวณเชิงทฤษฎี

คำสำคัญ: อีลาสติก, วิธียิงเป้า, เสถียรภาพ, แรงในแนวราบ

Abstract

This paper presents the study of the stability of an elastica under the gravitational field using the horizontal force at mid-length of the elastica. One end of the elastica is initially fixed while the other end can increase the length through the sleeve support. At the mid-length of the elastica, there is a horizontal force served as a tool for investigating the stability of the elastica. The stability of the elastica can be observed

from the signs of the stiffness of the elastica against the horizontal force. The governing differential equations consist of equilibrium equations of the elastica segment, moment-curvature relationship, and geometric relations of the elastica. Solutions of the problem can be calculated by employing the shooting method. The governing differential equations are integrated numerically (i.e., Runge-Kutta method) to satisfy boundary conditions. The results from the computation would be compared to the experimental results. From the study, the gravitational field in terms of self-weight of the elastica causes the instability when the total arc-length is increased beyond a critical value. Moreover, the results from the experiment using the high flexibility specimens (i.e., polycarbonate sheets) exhibit the good agreement with those from the theoretical results.

Keywords: Elastica, Shooting Method, Stability, Horizontal Force

1. บทนำ

การสูญเสียเสถียรภาพของอีลาสติกอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วงของโลกในรูปแบบน้ำหนักบรรทุกของตัวเองเป็นปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งของการศึกษาพฤติกรรมของอีลาสติก ซึ่งอาจพบปัญหาในลักษณะดังกล่าวได้โดยทั่วไป อาทิเช่นในกรณีของเสาเอ็น (Cantilever column) ซึ่งพบว่าเมื่อทำการเพิ่มความยาวของเสาจนกระทั่งมากกว่าความยาววิกฤติ (หรือน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ) แล้ว (เช่นเดียวกับกรณีเพิ่มน้ำหนักบรรทุกตัวเอง) เสาจะไม่สามารถรักษารูปร่างในแนวตั้งตรงได้อันเนื่องมาจากน้ำหนักบรรทุกของตัวเองทำให้เสาสูญเสียเสถียรภาพ ซึ่งงานวิจัยที่ศึกษาปัญหาในลักษณะดังกล่าวได้แก่ Duan และ Wang [1] ซึ่งได้ศึกษาหาคำตอบแบบแม่นยำตรงของน้ำหนักบรรทุกวิกฤติซึ่งจะทำให้เสาคิดการสูญเสียเสถียรภาพ โดยมีจุดรองรับในรูปแบบต่างๆ และปัญหาที่คล้ายกัน

แต่ลักษณะของเสาที่เป็นแบบปลายเรียว (Tapered column) ศึกษาโดย Wang [2] ซึ่งพบว่าเสถียรภาพของเสาปลายเรียวขึ้นอยู่กับสนามของแรงโน้มถ่วงของโลก (น้ำหนักบรรทุกตัวเอง) และองศาความเรียวของเสา และในกรณีที่ว่าวัสดุของเสายืดหยุ่นที่มีความไวเชิงเส้นที่มีความอ่อนตัว (softening behavior) เสถียรภาพของเสายืดหยุ่นในกรณีดังกล่าวได้ศึกษาโดย Virgin และ Plaut [3] นอกเหนือไปจากการศึกษาเสถียรภาพของเสายืดหยุ่นภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองแล้ว มีงานวิจัยอื่นที่ศึกษาเสถียรภาพของอิลาสติกคาในรูปแบบอื่นเช่น การศึกษาเสถียรภาพของอิลาสติกคาที่มีปลายยึดแน่น (fixed ends) ทั้งสองด้านเช่น Domokos และคณะ [4] กรณีอิลาสติกคาในสามมิติเสถียรภาพของอิลาสติกคาที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านสามารถสูญเสียเสถียรภาพในรูปแบบการบิดตัวออกนอกระนาบได้ (out-of-plane buckling) คืองานวิจัยของ Phungpaingam และคณะ [5]

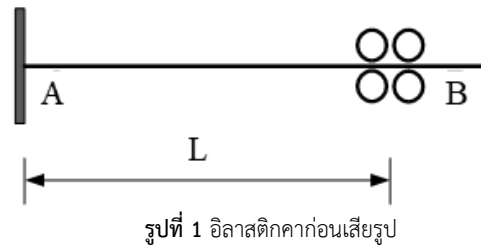
การทดสอบเสถียรภาพของอิลาสติกคาสามารถทำได้โดยวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ 1) สังเกตค่าสตีเฟนส [5-7] 2) ตรวจสอบการแปรผันของอันดับสองของฟังก์ชันพลังงานศักย์รวม [8] และ 3) วิธีการทางพลศาสตร์โดยสังเกตค่าของความถี่ธรรมชาติ [3,9-10] ซึ่งในแต่ละวิธีการจะเหมาะสมกับลักษณะของปัญหาที่แตกต่างกันไป ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการตรวจสอบค่าสตีเฟนสของอิลาสติกคาต่อแรงกระทำในแนวราบเพื่อศึกษาตำแหน่งวิกฤตที่ทำให้อิลาสติกคาเกิดการสูญเสียเสถียรภาพในแนวตั้งตรง (Upright position) โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำในแนวราบกับระยะเคลื่อนตัวในแนวราบ

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการสร้างสมการครอบคลุมปัญหาที่มีความไวเชิงเส้นจากสมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อยอิลาสติกคา ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง และความสัมพันธ์ของรูปร่างทางเรขาคณิตของอิลาสติกคา ผลกระทบของแรงที่กึ่งกลางได้ถูกรวมเข้าไปโดยพิจารณาชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาที่กึ่งกลาง ซึ่งได้นำเสนอใน [11] หลังจากนั้นได้ใช้วิธีการยิงเป้าเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ผลลัพธ์ของความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กึ่งกลางและระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบที่จุดกึ่งกลาง สามารถทำนายพฤติกรรมของเสถียรภาพของอิลาสติกคาได้โดยการสังเกตเครื่องหมายของเส้นโค้งความสัมพันธ์ของแรงกระทำในแนวราบและระยะเคลื่อนตัวในแนวราบ หากความชันของเส้นโค้ง (สตีเฟนส) มีค่าเป็นบวกแสดงถึงการมีเสถียรภาพ ในขณะที่ความชันของเส้นโค้งที่เป็นลบหมายถึงการสูญเสียเสถียรภาพ นอกเหนือไปจากการคำนวณเชิงตัวเลขแล้วยังได้ทำการทดลองเปรียบเทียบอย่างง่ายขึ้นมา โดยใช้แผ่นโพลีคาร์บอเนตซึ่งมีความยืดหยุ่นสูง เหมาะสำหรับการนำมาทดลองปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอิลาสติกคา ซึ่งจากผลเปรียบเทียบอย่างง่ายแสดงถึงความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

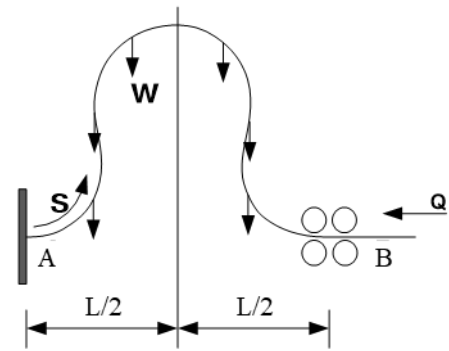
2. ลักษณะของปัญหา

ลักษณะของโครงสร้างที่ใช้ในการศึกษาในครั้งนี้จะมีลักษณะเป็นคานอย่างง่าย หน้าตัดสม่ำเสมอ ความยาวช่วงพาด (Span Length) คงที่ L โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาเป็นแบบยึดแน่น (จุด A) ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบ Sleeve (จุด B) แล้วให้แรงอัดในแนวแกนกระทำที่ปลายด้าน B ทำให้ความยาวของ อิลาสติกคาเพิ่มขึ้น โดยกำหนดความยาวตั้งแต่ 1.0 ถึง 10.0 ที่น้ำหนักของอิลาสติกคาตั้งแต่

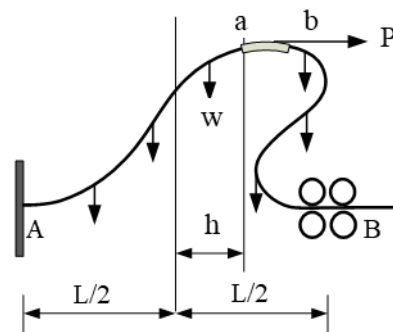
0.0 ถึง 2.5 ตามลำดับ และทำการทดสอบการมีเสถียรภาพของอิลาสติกคา โดยการเพิ่มแรงในแนวราบที่กึ่งกลางคานของอิลาสติกคา ที่ค่าของน้ำหนัก W และความยาว s ต่างๆ



รูปที่ 1 อิลาสติกคา ก่อนเสียรูป



รูปที่ 2 อิลาสติกคา หลังเสียรูป



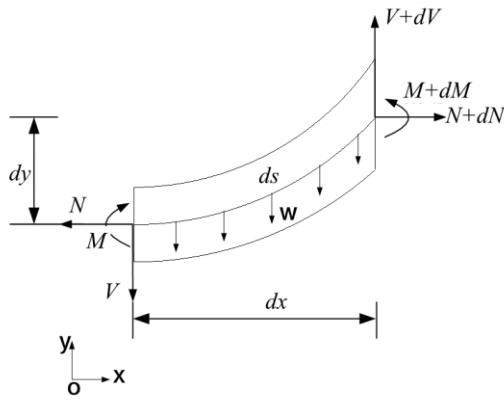
รูปที่ 3 อิลาสติกคา ขณะทดสอบเสถียรภาพ

3. ระบบสมการและการคำนวณอิลาสติกคา

3.1 อิลาสติกคา ก่อนและขณะที่ถูกกระทำด้วยแรงในแนวราบ \bar{P} เพื่อทดสอบเสถียรภาพ

จากการพิจารณาชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาภายใต้มีน้ำหนักบรรทุกตัวเองดังแสดงในรูปที่ 4 สามารถเขียนสมการสมดุลได้ดังนี้

$$\frac{dN}{ds} = 0; \frac{dV}{ds} = W; \frac{dM}{ds} = -V \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds} \quad (1a-c)$$



รูปที่ 4 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติคคา

โดยที่ค่า N, V และ M คือ ค่าแรงในแนวราบ, ค่าแรงในแนวตั้ง และโมเมนต์ตัด ตามลำดับ ds คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติคคา ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ตัดและความโค้ง (Moment – Curvature Relationship) สามารถแสดงได้ ดังสมการที่ 2

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \quad (2)$$

และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta; \frac{dy}{ds} = \sin\theta \quad (3a-b)$$

x และ y คือระยะตามแนวราบและระยะตามแนวตั้งที่วัดจากจุดอ้างอิง A

สำหรับการศึกษาในครั้งนี้ค่าต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณ จะทำการแปลงให้เป็นแบบไร้มิติ เพื่อความสะดวกในการคำนวณและเปรียบเทียบผลค่าที่ทำการแปลงให้เป็นแบบไร้มิติแสดงดังนี้

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \bar{y} = \frac{y}{L}; \bar{s} = \frac{s}{L} \quad (4a-c)$$

$$\bar{N} = \frac{NL^2}{EI}; \bar{V} = \frac{VL^2}{EI}; \bar{M} = \frac{ML}{EI}; \bar{P} = \frac{PL^2}{EI}; \bar{W} = \frac{WL^3}{EI} \quad (5a-e)$$

จากสมการที่ (1 – 3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบไร้มิติได้ดังนี้

$$\frac{d\bar{N}}{d\bar{s}} = 0; \frac{d\bar{V}}{d\bar{s}} = \bar{W}; \frac{d\bar{M}}{d\bar{s}} = -\bar{V} \cos\theta + \bar{N} \sin\theta \quad (6a-c)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{s}} = \bar{M} \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos\theta; \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin\theta \quad (8a-b)$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองด้านของอิลาสติคคาแสดงได้ดังนี้ ที่ $\bar{s} = 0$

$$\bar{x}(0) = 0; \bar{y}(0) = 0; \theta(0) = 0 \quad (9a-c)$$

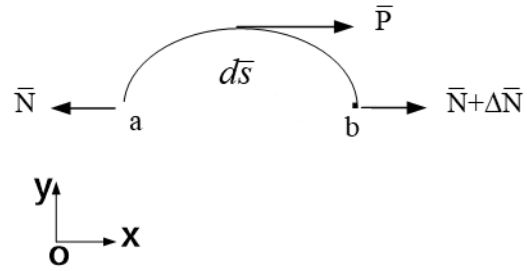
ที่ $\bar{s} = \bar{s}_t$

$$\bar{x}(\bar{s}_t) = 1; \bar{y}(\bar{s}_t) = 0; \theta(\bar{s}_t) = 0 \quad (10a-c)$$

จากการพิจารณาอิลาสติคคาในสภาพแบบมีน้ำหนักตัวเองและมีแรงกระทำในแนวราบ โดยกำหนดระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ $\bar{h} = 0 - 0.5$ เพื่อคำนวณหาแรงในแนวราบ \bar{P} ในรูปที่ 5 สามารถเขียนสมการสมดุล ตำแหน่งที่มีแรงในแนวราบกระทำได้ดังนี้

$$\bar{N} + \Delta\bar{N} - \bar{N} + \bar{P} = 0 \quad (11)$$

$$\therefore \Delta\bar{N} = -\bar{P} \quad (12)$$



รูปที่ 5 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติคคาที่ถูกกระทำ โดยแรงในแนวราบ \bar{P}

ซึ่งในกรณีนี้มีความไม่ต่อเนื่องของแรงในแนวราบ \bar{N} ที่ตำแหน่ง $\frac{\bar{s}_t}{2}$ จึงไม่สามารถทำการอินทิเกรตแบบต่อเนื่องจาก $\bar{s} = 0$ ถึง $\bar{s} = \bar{s}_t$ ได้ จำเป็นต้องแบ่งช่วงของการอินทิเกรตเป็น 2 ช่วงได้แก่ $0 \leq \bar{s} \leq \frac{\bar{s}_t}{2}$

และ $\frac{\bar{s}_t}{2} \leq \bar{s} \leq \bar{s}_t$ โดยในช่วง $\frac{\bar{s}_t}{2} \leq \bar{s} \leq \bar{s}_t$ มีแรงในแนวราบเกิดการเปลี่ยนแปลงตามสมการที่ 13

$$\bar{N}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \bar{N} - \bar{P} \quad (13)$$

ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตมาถึงตำแหน่ง $\frac{\bar{s}_t}{2}$ แรงที่ตำแหน่ง $\frac{\bar{s}_t}{2}^+$ จะมีค่าเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$\bar{N}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \bar{N}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^- - \bar{P} \quad (14)$$

$$\bar{V}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \bar{V}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^- \quad (15)$$

$$\bar{M}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \bar{M}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^- \quad (16)$$

$$\bar{x}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \bar{x}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^- \quad (17)$$

$$\bar{y}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \bar{y}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^- \quad (18)$$

$$\theta\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+ = \theta\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^- \quad (19)$$

ซึ่งค่าดังกล่าวจะเป็นค่าเริ่มต้นของการอินทิเกรตจาก $\bar{s} = \frac{\bar{s}_t}{2}$ ไปจนถึง $\bar{s} = \bar{s}_t$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหา คือ

$$\bar{x}(\bar{s}_t) = 1; \bar{y}(\bar{s}_t) = 0; \theta(\bar{s}_t) = 0; \bar{x}\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right) - 0.5 = \bar{h} \quad (20a-d)$$

เนื่องจากมีการใส่แรงจากภายนอก \bar{P} เข้าไปในระบบจึงทำให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเพิ่มขึ้น 2 ตัวแปรคือ \bar{P} และ \bar{h} แต่ในปัญหานี้ จะทำการกำหนดให้ \bar{h} เป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นหากค่า \bar{s}_t และ \bar{h} เป็นตัวแปรที่กำหนดให้จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 ตัวแปร คือ $\bar{M}, \bar{V}, \bar{N}$ และ \bar{P} ซึ่งสอดคล้องกับ 4 เงื่อนไขในสมการที่ (20)

โดยที่

\bar{x} = ระยะเคลื่อนตัวในแนวราบ

\bar{y} = ระยะเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง

\bar{s}_t = ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด

\bar{s} = ความยาวส่วนโค้ง

\bar{L} = ความยาวช่วงของอิลาสติกคา

\bar{V} = แรงในแนวดิ่ง

\bar{N} = แรงในแนวราบ

\bar{M} = โมเมนต์ดัด

EI = ความแข็งแรงต่อการดัด

\bar{P} = แรงในแนวราบที่กึ่งกลางอิลาสติกคา

\bar{h} = ระยะที่เคลื่อนที่ในแนวราบที่ตำแหน่งกึ่งกลางอิลาสติกคา

$\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^+$ = ความยาวส่วนโค้งที่มากกว่า $\frac{\bar{s}_t}{2}$ เพียงเล็กน้อย

$\left(\frac{\bar{s}_t}{2}\right)^-$ = ความยาวส่วนโค้งที่น้อยกว่า $\frac{\bar{s}_t}{2}$ เพียงเล็กน้อย

3.2 กระบวนการคำนวณ

จากระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของปัญหาค่าขอบเขต (6) - (8) ซึ่งเป็นปัญหาแบบ Two - Point Boundary Values Problem แก้ปัญหาโดยการกำหนดค่า \bar{s}_t และ \bar{W} แล้วสมมุติค่าเริ่มต้น $\bar{M}, \bar{V}, \bar{N}$ และ \bar{P} เพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในกระบวนการคำนวณด้วยวิธี Shooting Optimization ร่วมกับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบ Runge-Kutta โดยมีเป้าหมายเพื่อหาค่าตัวแปรตามที่ต้องการ ได้แก่ $\bar{M}, \bar{V}, \bar{N}$ และ \bar{P} ในที่นี้ใช้เงื่อนไขดังระบุในสมการที่ 21

$$\text{Min} \cdot \phi = \left| \theta(\bar{s}_t) + |(\bar{s}_t) - 1| + \left| \bar{y}(\bar{s}_t) + \left| \bar{h} - \bar{x} \left(\frac{\bar{s}_t}{2} \right) + 0.5 \right| \right| \quad (21)$$

หากมีการตรวจสอบพบว่าค่าของฟังก์ชันทางขวาของสมการที่ 21 ยังมีค่ามากกว่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้คือ $\epsilon = 10^{-9}$ จะเกิดการคำนวณซ้ำจนกระทั่งได้คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว

4. การทดสอบตัวอย่าง

ทำการทดสอบตัวอย่างด้วยแบบจำลองคานอย่างง่าย ตามรูปที่ 3 หน้าตัดสม่ำเสมอ ความยาวช่วงพาด(Span Length) คงที่ L โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาเป็นแบบยึดแน่น(จุด A) ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบ sleeve (จุด B) แล้วให้แรงอัดในแนวแกนกระทำที่ปลายด้าน B ทำให้ความยาวของอิลาสติกคาเพิ่มขึ้น โดยกำหนด

ความยาวตั้งแต่ 1.0 – 3.0 m ที่น้ำหนักของอิลาสติกคาแตกต่างกัน 2 ค่า ซึ่งแปรผันตามความกว้างของชิ้นตัวอย่าง 25 , 50 mm ตามลำดับ และทำการทดสอบการมีเสถียรภาพของอิลาสติกคาโดยการเพิ่มแรงในแนวราบที่กึ่งกลางคานของอิลาสติกคา ที่ค่าของน้ำหนัก \bar{W} และความยาว \bar{s} ต่าง ๆ

4.1 เครื่องมือและอุปกรณ์

1. แผ่นโพลีคาร์บอเนต ที่มีขนาดแตกต่างกัน 2 ขนาด และคุณสมบัติอื่นๆ ดังรายละเอียด

ขนาด (mm)	I (cm ⁴)	E (kg/cm ²)	W (kg/cm)
2 x 25 x 3000	0.001667	21588.186	0.0006
2 x 50 x 3000	0.003333	21588.186	0.0012

- โต๊ะสำหรับการจับยึดอุปกรณ์ทดสอบ
- ไม้บรรทัดเหล็ก
- เครื่องชั่งแบบแขวน ค่าความละเอียด 10 กรัม
- กล้องถ่ายรูปพร้อมขาตั้ง
- เครื่องคอมพิวเตอร์
- กระดาษกราฟ
- ตลับเมตร

4.2 วิธีการทดลองขณะทำการทดสอบเสถียรภาพ

1. จับยึดแผ่นโพลีคาร์บอเนตกับชุดอุปกรณ์สำหรับทดสอบโดยมีความยาวช่วงพาด(Span Length) คงที่ $L = 0.669$ m ($\bar{W} = 5.00$) และ $L = 0.766$ m ($\bar{W} = 7.50$) โดยกำหนดค่า $\bar{W} = 5.00, 7.50$ แล้วคำนวณค่า L จากสมการ 5e โดยทำการยึดปลายด้านหนึ่งของแผ่นโพลีคาร์บอเนตกับหัวแบบยึดแน่น(จุด A) ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบ sleeve (จุด B) ให้แรงอัดในแนวแกนกระทำที่ปลายด้าน B ทำให้ความยาวของอิลาสติกคาเพิ่มขึ้น

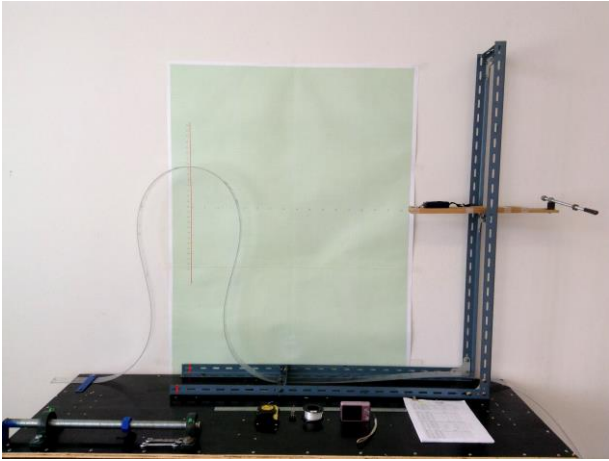
2. แปรผันขนาดแผ่นโพลีคาร์บอเนตที่ ขนาด 2 x 25 x 3000 mm และ 2 x 50 x 3000 mm ตามลำดับ

3. ที่แต่ละขนาดของแผ่นโพลีคาร์บอเนตให้แรงกระทำที่กึ่งกลางของความยาว ทำการทดสอบโดยจับยึดกับเครื่องชั่งแบบแขวนแล้วดึงให้แรงในแนวราบ กำหนดระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบที่ระยะ $\bar{h} = 0-0.5$ แล้วอ่านค่าแรงที่เครื่องชั่ง

4. ทำในขั้นตอนที่ 1 – 3 อีกครั้งโดยทำการเปลี่ยนแปลงขนาดของแผ่นโพลีคาร์บอเนต

5. จดบันทึกค่าความยาวส่วนโค้ง และแรงที่กระทำ

6. นำค่าตัวแปรต่างๆ ที่ได้จากการทดลองไปสรุปผลและเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข



รูปที่ 6 ชุดอุปกรณ์สำหรับการทดลองเพื่อทดสอบเสถียรภาพ

5. ผลเชิงทฤษฎีและการทดลอง

5.1 ผลการคำนวณความยาวส่วนโค้งทั้งหมดที่ยังทำให้มีเสถียรภาพ

ในการทดสอบเสถียรภาพของอิลาสติกคาภายใต้สนามของแรงโน้มถ่วงของโลก อิลาสติกคาจะถูกบังคับด้วยความยาวส่วนโค้งทั้งหมด (\bar{s}_l) ให้มีค่าคงที่ และทำการทดสอบเสถียรภาพโดยอาศัยแรงกระทำในแนวราบที่กึ่งกลาง \bar{P}

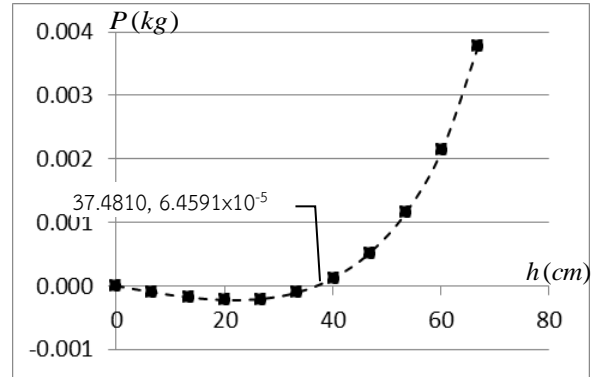
ตารางที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักของอิลาสติกคา (\bar{W}) กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดที่เริ่มสูญเสียเสถียรภาพ ($\bar{s}_{l(crit)}$)

\bar{W}	$\bar{s}_{l(crit)}$
0.50	6.10
1.00	5.20
2.00	4.40
2.50	4.20
5.00	3.49
7.50	3.18

ตารางที่ 1 แสดงความยาวส่วนโค้งวิกฤติที่น้ำหนักของอิลาสติกคา \bar{W} แปรผันตั้งแต่ 0.5 ถึง 7.5 ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อน้ำหนักบรรทุกเพิ่มมากขึ้น ความยาวส่วนโค้งที่ทำให้อิลาสติกคาเริ่มไร้เสถียรภาพจะยิ่งลดลง อันเนื่องมาจากผลของแรงโน้มถ่วงที่เพิ่มมากขึ้นนั่นเอง

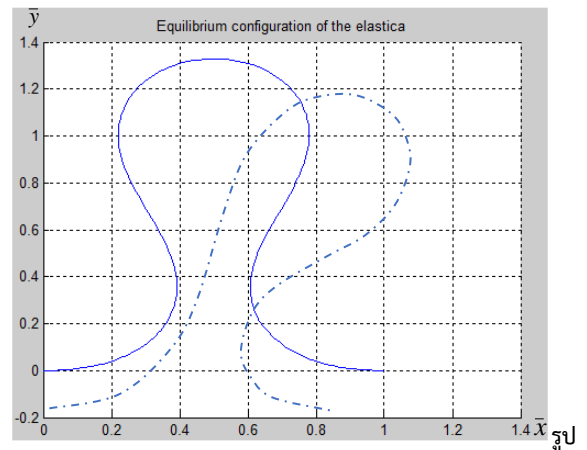
จากข้อมูลตามตารางที่ 1 ที่ $\bar{W} = 5.00$ และ 7.50 นำผลที่ได้ไปใช้เป็นค่าเริ่มต้นสำหรับการทดลองอย่างง่าย ทั้งนี้เพราะจากคุณสมบัติของวัสดุที่เลือกใช้เป็นแผ่นโพลีคาร์บอเนต การเลือกใช้ \bar{W} ในช่วงดังกล่าวมีความสะดวกและเหมาะสมในการวัดและการอ่านค่าระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ (\bar{h}) และแรงในแนวราบ (\bar{P}) การทดสอบเสถียรภาพของอิลาสติกคาทำได้โดยการสังเกตเครื่องหมายของสตีเฟนส์ที่ด้านการเคลื่อนที่ในแนวราบภายใต้แรงกระทำ \bar{P} หากมีค่าเป็นบวกแสดงถึงการมีเสถียรภาพ แต่หากเป็นลบแสดงว่าไร้เสถียรภาพ ซึ่งแสดงให้เห็นดังรูปที่ 7

เมื่อ $\bar{W} = 5.00$ และ $\bar{s}_l = 3.50$ โดยรูปร่างของอิลาสติกคาที่ตั้งตรงมีความไร้เสถียรภาพ ดังนั้นอิลาสติกคาจึงไม่สามารถตั้งตรงได้เช่นเดียวกับรูปที่ 6 อิลาสติกคาจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเพื่อหาจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพใหม่ที่ระยะ $h = 37.4810$ cm ซึ่งในกรณีนี้แสดงได้ในรูปที่ 8 ที่ 9 และในทำนองเดียวกันในรูปที่ 10 ถึง 12 ซึ่ง $\bar{W} = 7.50$ และ $\bar{s}_l = 3.20$ ซึ่งรูปร่างในแนวตั้งตรงของอิลาสติกคา มีความไร้เสถียรภาพ แต่จะมีจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพใหม่คือที่ระยะ $h = 54.3979$ cm



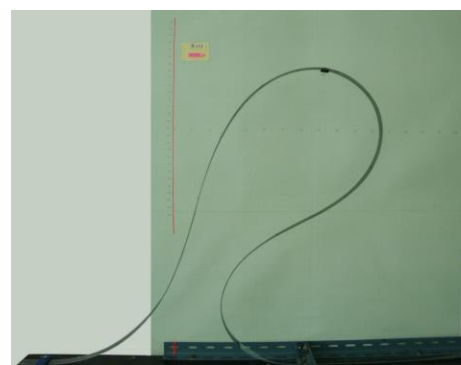
รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P

ที่ $\bar{W} = 5.00$, $\bar{s}_l = 3.50$



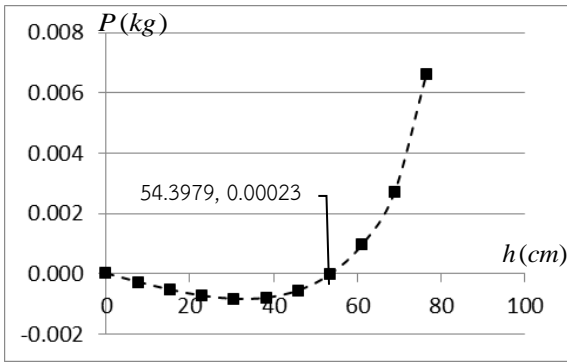
ที่ 8 รูปร่างการเสถียรจากการคำนวณ

ที่ $\bar{W} = 5.00$, $\bar{s}_l = 3.50$, $\bar{h} = 0, 0.56$ ($h = 0, 37.4810$ cm)

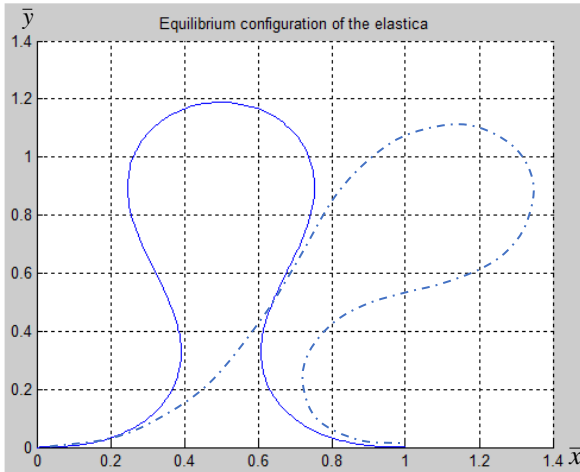


รูปที่ 9 รูปร่างการเสถียรจากการทดลอง

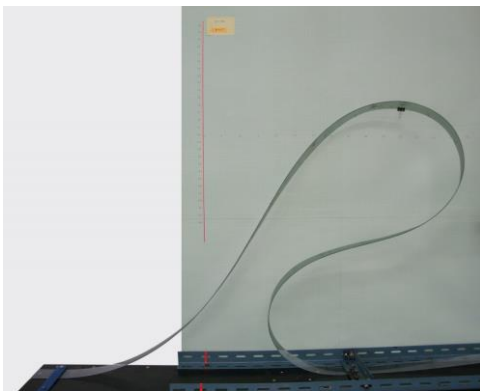
ที่ $\bar{W} = 5.00$, $\bar{s}_l = 3.50$, $\bar{h} = 0.56$ ($h = 37.4810$ cm)



รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ \bar{P}
ที่ $\bar{W} = 7.50$, $\bar{s}_t = 3.20$



รูปที่ 11 รูปร่างการเสียรูปจากการคำนวณ
ที่ $\bar{W} = 7.50$, $\bar{s}_t = 3.20$, $\bar{h} = 0.71$ ($h = 0, 54.3979\text{cm}$)



รูปที่ 12 รูปร่างการเสียรูปจากการทดลอง
ที่ $\bar{W} = 7.50$, $\bar{s}_t = 3.20$, $\bar{h} = 0.71$ ($h = 54.3979\text{cm}$)

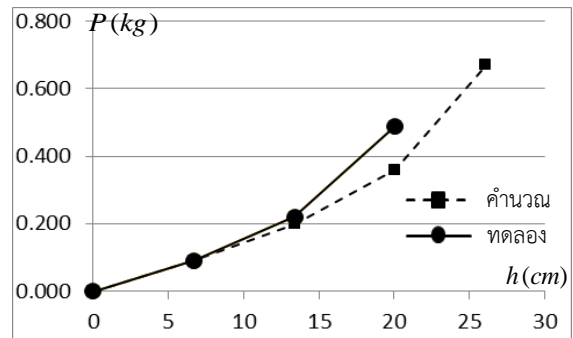
เพื่อแสดงให้เห็นความสอดคล้องของผลในเชิงทฤษฎีและผลในเชิงการทดลอง จะแสดงผลการเปรียบเทียบแรงในแนวราบที่ $\bar{W} = 5.00$ และ 7.50 ที่ \bar{s}_t ต่าง ๆ กัน ดังแสดงในหัวข้อ 5.2

5.2 ผลเชิงทฤษฎีและการทดลองจำแนกรายกรณี

จากความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักของอิลาสติคคา (\bar{W}) และความยาวส่วนโค้งวิกฤติ ($\bar{s}_t(cri)$) แสดงในตารางที่ 1 นำผลการคำนวณที่น้ำหนักของอิลาสติคคา (\bar{W}) เท่ากับ 5.00 และ 7.50 ไปทำการทดสอบเสถียรภาพด้วยการทดลอง เพื่อเปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับผลจากการทดลองโดยทำการทดสอบกับอิลาสติคคาที่มีความกว้าง 2 ขนาด คือ 2.50 cm และ 5.00 cm ผลเป็นดังนี้

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลองกับอิลาสติคคา ขนาด 2.50 cm , $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_t = 2.0$

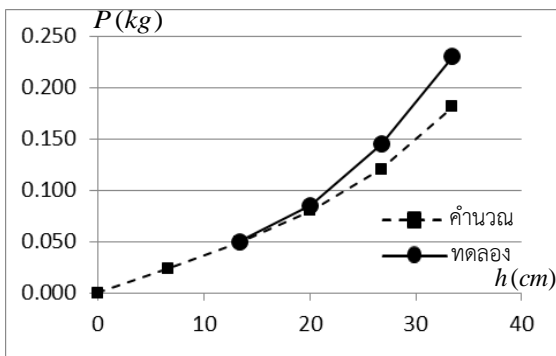
\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	6.693	11.34	0.0911	0.09
0.2	13.386	24.73	0.1987	0.22
0.3	20.079	44.88	0.3605	0.49
0.39	26.103	83.44	0.6702	NA



รูปที่ 13 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติคคา ขนาด 2.50 cm $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_t = 2.0$

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 2.50 cm , $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

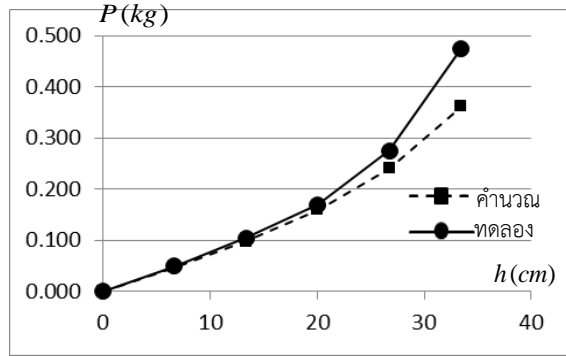
\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	6.693	2.93	0.0235	NA
0.2	13.386	6.12	0.0491	0.05
0.3	20.079	9.93	0.0797	0.09
0.4	26.772	14.96	0.1201	0.15
0.5	33.466	22.54	0.1810	0.23



รูปที่ 14 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 2.50 cm $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

ตารางที่ 5 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm , $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

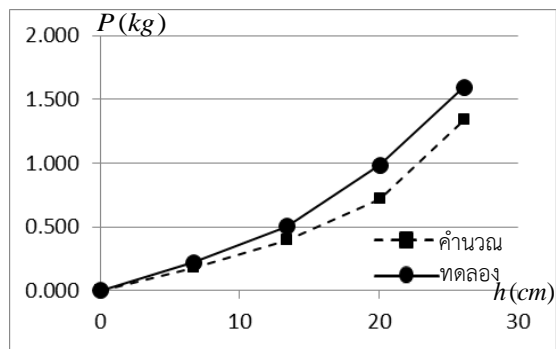
\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	6.693	2.93	0.0470	0.05
0.2	13.386	6.12	0.0983	0.11
0.3	20.079	9.93	0.1594	0.17
0.4	26.772	14.96	0.2403	0.28
0.5	33.460	22.54	0.3620	0.48



รูปที่ 16 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

ตารางที่ 4 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm , $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$

\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	6.693	11.34	0.1821	0.22
0.2	13.386	24.73	0.3973	0.51
0.3	20.079	44.88	0.7210	0.99
0.39	26.103	83.44	1.3404	1.60



รูปที่ 15 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$

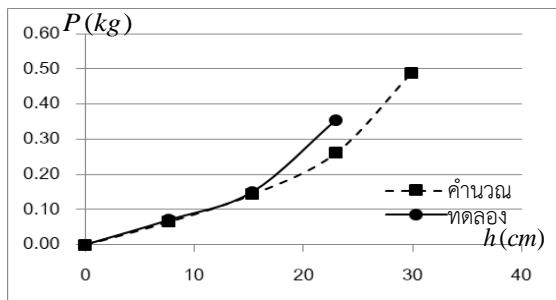
จากผลในตารางที่ 2 และรูปที่ 13 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P พบว่า ที่ $b = 2.50$ cm , $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$ ที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ $\bar{h} = 0 - 0.2$ ผลการคำนวณเชิงตัวเลขและผลเชิงทดลองให้ค่า P ใกล้เคียงกัน โดยที่เมื่อ \bar{h} เพิ่มขึ้นค่า P มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเช่นกัน การทดลองให้ผลไปในแนวทางเดียวกัน แต่ในบางกรณีไม่สามารถหาค่า P ได้เนื่องจากเกิดการยึดรั้งที่จุดรองรับ

เมื่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้นเป็น $\bar{s}_r = 2.5$ (ตารางที่ 3 และรูปที่ 14) พบว่าที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบที่มีค่าน้อย ($\bar{h} = 0.1$) ผลการทดลองไม่สามารถอ่านค่า P ได้ เนื่องจากข้อจำกัดของเครื่องมือวัดที่ไม่สามารถอ่านค่าแรงที่ค่าแรงน้อยมากได้ เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขกับผลเชิงการทดลองจะมีความสอดคล้องกัน

จากผลตารางที่ 4-5 และรูปที่ 15-16 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P พบว่า ที่ $b = 5.00$ cm , $\bar{W} = 5.00$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$ และ $\bar{s}_r = 2.5$ ผลเชิงทดลองให้ค่า P เป็น 2 เท่า ของแผ่นที่มีความกว้าง $b = 2.50$ cm ที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ $\bar{h} = 0.1$ ผลเชิงการทดลองสามารถอ่านค่า P ได้ 0.05 kg โดยแผ่นที่มีความกว้าง $b = 2.50$ cm นั้น อ่านค่าไม่ได้ ซึ่งเป็นการยืนยันได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขมีความสอดคล้องกันกับผลการทดลอง

ตารางที่ 6 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 2.50 cm , $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$

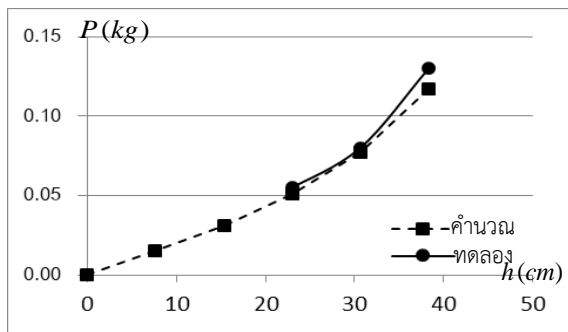
\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	7.662	10.70	0.0656	0.07
0.2	15.323	23.37	0.1432	0.15
0.3	22.985	42.55	0.2608	0.35
0.39	29.881	79.56	0.4877	NA



รูปที่ 17 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 2.50 cm $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$

ตารางที่ 7 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 2.50 cm , $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

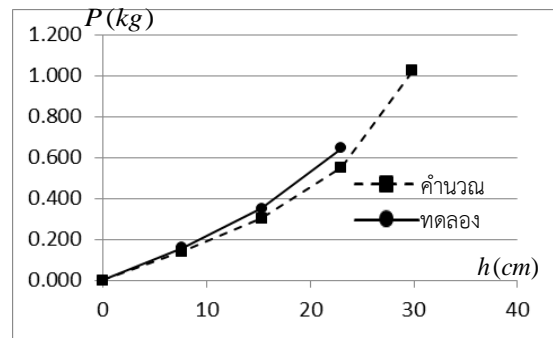
\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	7.662	2.44	0.0149	NA
0.2	15.323	5.10	0.0313	NA
0.3	22.985	8.31	0.0509	0.06
0.4	30.647	12.59	0.0772	0.08
0.5	38.308	19.11	0.1172	0.13



รูปที่ 18 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 2.50 cm $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

ตารางที่ 8 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm , $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$

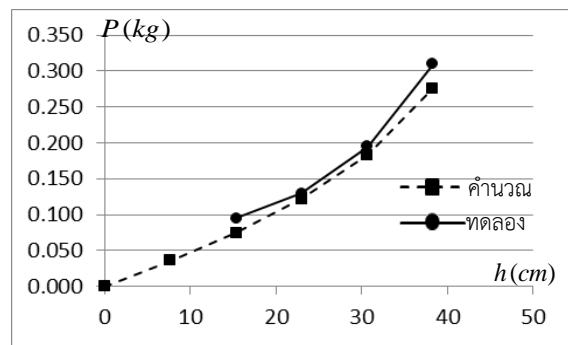
\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	7.662	11.34	0.1390	0.16
0.2	15.323	24.73	0.3032	0.48
0.3	22.985	44.88	0.5502	0.64
0.39	29.881	83.44	1.0229	NA



รูปที่ 19 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$

ตารางที่ 9 เปรียบเทียบผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขกับการทดลอง
กับอิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm , $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

\bar{h} (ไร้หน่วย)	h (cm) (มีหน่วย)	\bar{P} (ไร้หน่วย)	P (kg)	
			คำนวณ	ทดลอง
0	0	0	0	0
0.1	7.662	2.93	0.0359	NA
0.2	15.323	6.12	0.0750	0.09
0.3	22.985	9.93	0.1217	0.13
0.4	30.647	14.96	0.1833	0.19
0.5	38.308	22.54	0.2763	0.31



รูปที่ 20 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P
ที่อิลาสติกคา ขนาด 5.00 cm $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.5$

จากผลในตารางที่ 6 และรูปที่ 17 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P พบว่า ที่ $b = 2.50$ cm, $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$ ที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ $\bar{h} = 0 - 0.2$ แสดงให้เห็นถึงผลการคำนวณเชิงตัวเลขและผลเชิงทดลองให้ค่าแรง P ใกล้เคียงกัน โดยที่เมื่อ \bar{h} เพิ่มขึ้น P จะเพิ่มขึ้นเช่นกัน โดยในบางกรณีการทดลองไม่สามารถวัดค่าแรงดึงได้เนื่องจากเกิดการยึดรั้งที่จุดรองรับ

เมื่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้นเป็น $\bar{s}_r = 2.5$ (ตารางที่ 7 และรูปที่ 18) พบว่าที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบที่มีค่าน้อย $\bar{h} = 0 - 0.2$ ผลการทดลองไม่สามารถอ่านค่า P ได้ เนื่องจากข้อจำกัดของเครื่องมือวัดที่ไม่สามารถอ่านค่าแรงที่ค่าแรงน้อยมากได้ เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขกับผลเชิงการทดลองจะมีค่าใกล้เคียงกันที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ $\bar{h} = 0.3 - 0.5$

จากผลตารางที่ 8-9 และรูปที่ 19-20 ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P พบว่า ที่ $b = 5.00$ cm, $\bar{W} = 7.50$ ที่ $\bar{s}_r = 2.0$ และ $\bar{s}_r = 2.5$ ผลเชิงทดลองให้ P เป็น 2 เท่า ของแผ่นที่มีความกว้าง $b = 2.50$ cm ที่ระยะการเคลื่อนที่ในแนวราบ $\bar{h} = 0.2$ ผลเชิงการทดลองสามารถอ่านค่า P ได้ 0.09 kg โดยแผ่นที่มีความกว้าง $b = 2.50$ cm นั้น อ่านค่าไม่ได้เนื่องจากค่าน้อยมาก

จากที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่า ผลการคำนวณเชิงทฤษฎีและผลการทดลองในภาพรวมสามารถแสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีซึ่งแสดงให้เห็นถึงความน่าเชื่อถือของแบบจำลองดังกล่าว

6. บทสรุป

การศึกษาพฤติกรรมการมีเสถียรภาพของอีลาสติคภายใต้แรงอัดในแนวแกน สนามของแรงโน้มถ่วงของโลก และการให้แรงในแนวราบกระทำที่กึ่งกลางของอีลาสติค เพื่อทดสอบความมีเสถียรภาพ ผลเฉลยของปัญหาสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีอิงเป้าร่วมกับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรุง-คุตดา ผลที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขจะถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลอง เสถียรภาพของอีลาสติคประเมินได้โดยการสังเกตเครื่องหมายของเส้นความสัมพันธ์ระหว่าง h และ P ความชันที่เป็นบวกสอดคล้องกับค่าสตีเฟนส์ที่เป็นบวกซึ่งหมายถึงการมีเสถียรภาพ ในทางกลับกันหากมีค่าเป็นลบจะแสดงถึงความไร้เสถียรภาพ ความยาวส่วนโค้งของอีลาสติคที่ทำให้อีลาสติคในสภาพตั้งตรงเกิดความไร้เสถียรภาพ (ความยาวส่วนโค้งวิกฤติ) จะถูกสังเกตจากเครื่องหมายของความสัมพันธ์นี้ซึ่งพบว่าเมื่อน้ำหนักของอีลาสติคเพิ่มมากขึ้น ค่าความยาวส่วนโค้งวิกฤติจะมีค่าลดลง ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี นอกจากนี้ การคำนวณยังแสดงถึงรูปร่างใหม่ที่มีความสมดุลในแบบที่มีเสถียรภาพซึ่งได้ทำการเปรียบเทียบกับการทดลองซึ่งให้ผลที่สอดคล้องเช่นเดียวกัน

เอกสารอ้างอิง

[1] W.H. Duan and C.M. Wang. (2008). Exact Solution for Buckling of Columns Including Self-weight, J. Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 134(1), pp.116-119.

[2] C.Y. Wang. (2012). Large Post-buckling of Heavy Tapered Elastica Cantilevers and Its Asymptotic Analysis, Arch. Mech. Vol. 64(2), pp.207-220.

[3] L.N. Virgin and R.H. Plaut. (2004). Postbuckling and Vibration of Linearly Elastic and Softening Columns under Self-Weight. Int J. Solids and Structures. Vol.41(18-19). pp.4989-5001.

[4] G. Domokos, W.B. Fraser and I. Szeberenyi. (2003). Symmetry-Breaking Bifurcations of the Uplifted Elastic Strip. Physica D. Vol.185(2). pp. 67-77.

[5] B.Phungpaingam, L.N.Virgin and S.Chucheepsakul. (2012). Stability of Spatial Elastica in a Gravitational Field. Int J. Structural Stability and Dynamics. Vol.12(2). pp. 403-421.

[6] M. Brojan, M.Sitar and F. Kosel. (2012). On Static Stability of Nonlinearly Elastic Euler's Obeying the Modified Ludwick's Law. Int. J. Structural Stability and Dynamics. Vol.12(6), 1250077 (19 pages).

[7] B. Phungpaingam and S. Chucheepsakul. (2005). Post-buckling of an Elastic Column with Various Rotational End Restraints. Int J. Structural Stability and Dynamics. Vol. 5(1), pp. 113-123.

[8] V.V. Kuznetsov and S.V. Levyakov. (2002). Complete Solution of the Stability Problem for Elastica of Euler's Column. Int. Nonlinear Mechanics, Vol.37, pp.1003-1009.

[9] L.N. Virgin, S.T. Santillan and D.B. Holland. (2007). Effect of Gravity on Vibration of Vertical Cantilever. Mechanics Research Communications. Vol.34(3). pp. 312-317.

[10] B. Phungpaingam and Chucheepsakul. (2018). Postbuckling behavior of Variable-Arc-Length Elastica Connected with a Rotational Spring Joint Including the Effect of Configurational Force. Meccanica. Vol.53(10), pp. 2619-2636.

[11] ทิรยุทธ สมสุข และบุญชัย ผึ้งไผ่งาม,(2555) , การศึกษาเสถียรภาพของอีลาสติคโดยอาศัยแรงภายนอก , การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 17