

แรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

Critical Compression Load of Variable-Arc-Length Beam-Column Structure

ธนภัทร วัฒนบุญศิริ¹ อินทัช ด้านปาน¹ ธนนพ เหมือนเหลา¹ และการันต์ คล้ายฉ่ำ^{2*}

¹ นิสิตปริญญาตรี ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ. นครปฐม

² อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ. นครปฐม

*Corresponding author; E-mail address: karun.kl@ku.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอค่าแรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ คาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้เป็นโครงสร้างประเภทอีลาสติกคา ซึ่งปลายของโครงสร้างนี้สามารถเลื่อนผ่านจุดรองรับเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกที่กระทำ ส่งผลให้ความยาวส่วนโค้งของคานเปลี่ยนไป สมการครอบคลุมปัญหาของคาน-เสาสร้างจากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างคาน-เสา และจากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ ชุดสมการครอบคลุมปัญหาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 แบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจัดเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ผลคำตอบเชิงตัวเลขหาได้โดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้า ผลการศึกษาเชิงตัวเลขมุ่งเน้นศึกษาผลกระทบของแรงกระทำทางขวาง ได้แก่ น้ำหนักของโครงสร้างต่อค่าแรงอัดวิกฤติสำหรับ 4 โหมดแรกของการโก่งเดาะ และพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างคาน-เสา ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าผลของแรงกระทำทางด้านข้างทำให้แรงอัดวิกฤติลดลงและทำให้โครงสร้างเสียเสถียรภาพ

คำสำคัญ: คาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้, แรงอัดวิกฤติ, พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ, ระเบียบวิธียิงเป้า

Abstract

This paper presents the critical compressive load of the variable-arc-length (VAL) beam-column structure. Variable arc-length (VAL) beam-column is one of the elastica structures where its tip can slip through the support due to loadings, which results in the alteration of the total arc-length. The governing equations of the beam-column structure are derived by considering the differential geometry relations in a plane curve of the beam-column segment and the equilibrium of force and moment. The set of governing equations yields the nonlinear first-order differential equations, which are categorized as two-points boundary value problem. The numerical solution can be solved by using the shooting optimization method. This numerical investigation attempts to study the effect of the

lateral load, including the structure weight on the critical compression load for the first four buckling modes and the post-buckling behavior of VAL beam-column structure. The numerical results show that the increase in lateral load reduces the critical compressive load and causes to lose its stability.

Keywords: Critical Compressive Load, Post-Buckling Behavior, Shooting Optimization Method, Variable-Arc-Length Beam-Column

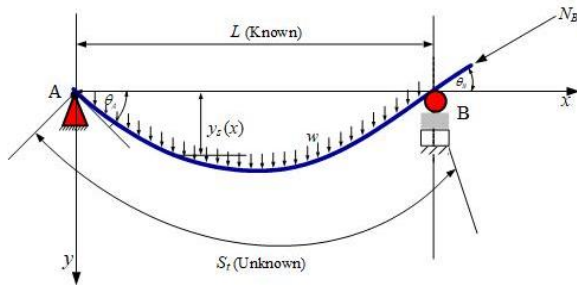
1. บทนำ

โครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length Beam-Column) ซึ่งความยาวส่วนโค้งที่เปลี่ยนไปขึ้นอยู่กับน้ำหนักของโครงสร้าง หรือแรงภายนอกที่กระทำ และทำให้โครงสร้างเกิดการแอ่นตัวมาก (Large Deflection) จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง การวิเคราะห์ปัญหาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำต่างๆ สามารถกระทำได้ทั้งวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ เช่น งานวิจัยของสุนิสา รอดสังวาลย์ [1] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จี้ระพงษ์ เทพพิทักษ์ [2] ได้วิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ ครุณย์ ชุ่มกลัด [3] ศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอีลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง จากงานวิจัยของ Athisakul และคณะ [4] ได้ศึกษาน้ำหนักวิกฤติไร้น้ำหนักของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้และพบว่ามีความเท่ากับ 8.253 ซึ่งคานจะไม่สามารถคงอยู่ในสภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ได้เมื่อน้ำหนักบรรทุกมากกว่าค่าวิกฤติ เพื่อเพิ่มน้ำหนักวิกฤติไร้น้ำหนักของคานในกรณีดังกล่าว การยึดรั้งที่ปลายคาน อาทิ ใช้แรงดึงยึดรั้งที่ปลายคานจะช่วยเพิ่มค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติได้ ดังนั้นการันต์ คล้ายฉ่ำ [5] ได้ทำการศึกษาหาน้ำหนักวิกฤติของคานเอียงต่างระดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงดึงที่จุดรองรับ อย่างไรก็ตาม งานวิจัยในอดีตยังไม่ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งเดาะของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดที่ปลายคานโดยรวมผลกระทบจากแรงด้านข้างด้วย

ดังนั้นงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งคาะ และหาแรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยพิจารณาผลกระทบจากแรงกระทำด้านข้างของคานด้วย งานวิจัยนี้ได้สร้างสมการทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นและใช้วิธียิงเป้า (Shooting Method) สำหรับหาคำตอบเชิงตัวเลข

2. สมการที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์

รูปที่ 1 แสดงลักษณะทางกายภาพของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีจุดรองรับทั้ง 2 ด้านอยู่ในระดับเดียวกัน ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแบบกระจายสม่ำเสมอเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้าง (w) และแรงอัดที่จุดรองรับด้านขวา (N_B) ปลายด้านขวาของโครงสร้างพาดอยู่บนจุดรองรับที่ยอมให้โครงสร้างเลื่อนสไลด์ผ่านได้ ดังนั้นเมื่อมีแรงกระทำจะทำให้ความยาวส่วนโค้งของคาน-เสา (S_t) สามารถแปรเปลี่ยนได้ ขณะที่ระยะห่างระหว่างจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคาน-เสาหรือความยาวช่วงมีค่าคงที่ (L) จากการแอนตัวมากของคาน-เสา จะทำให้คานแอนตัวจากตำแหน่งก่อนการเสียรูปไปยังตำแหน่งของคานที่สภาวะสมดุลสถิตย์ (y_s)



รูปที่ 1 ลักษณะการแอนตัวมากของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ B

รูปที่ 2 แสดงฟังก์ชันของชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีความยาวส่วนโค้งน้อย ๆ (ds_s) จากรูปนี้ สมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบโดยอ้างอิงทฤษฎีกลศาสตร์สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{dy_s}{ds_s} = \sin \theta \quad (1ก)$$

$$\frac{dx}{ds_s} = \cos \theta \quad (1ข)$$

$$\frac{d\theta}{ds_s} = \kappa = -\frac{M}{EI} \quad (1ค)$$

โดยที่ตัวแปร θ คือมุมระหว่างแนวราบกับแนวสัมผัสของโครงสร้าง S_t คือพิกัดตามความยาวส่วนโค้งของคาน และ x คือพิกัดตามระยะในแนวราบของโครงสร้าง ตัวแปร E และ I คือโมดูลัสยืดหยุ่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดโครงสร้าง ตามลำดับ

จากรูปที่ 2 สมการสมดุลของโครงสร้างคาน-เสาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งประกอบด้วยสมการสมดุลของแรงตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสียรูปของโครงสร้างดัง

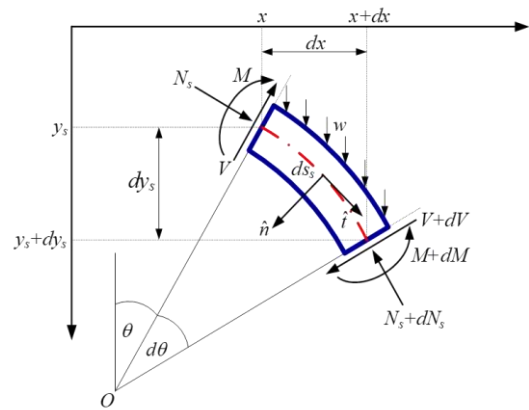
สมการที่ (2ก) และ (2ข) ขณะที่สมการที่ (2ค) คือสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O

$$\frac{dN_s}{ds_s} = V \frac{d\theta}{ds_s} - w \sin \theta \quad (2ก)$$

$$\frac{dV}{ds_s} = -N_s \frac{d\theta}{ds_s} - w \cos \theta \quad (2ข)$$

$$\frac{dM}{ds_s} = V \quad (2ค)$$

ตัวแปร N_s , M และ V คือแรงอัดตามแนวแกน โมเมนต์ดัดและแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของคาน ตามลำดับ



รูปที่ 2 ฟังก์ชันของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างคาน-เสา

สมการที่ (1) และ (2) เป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งจำเป็นต้องหาคำตอบด้วยวิธีการเชิงตัวเลข เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจำเป็นต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไร้หน่วย ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$s^* = \frac{S_s}{S_t}, \hat{s}_t = s_t/L, \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y_s}{L}, \hat{s} = \frac{S_s}{L} \quad (3ก)$$

$$\hat{w} = \frac{wL^3}{EI}, \hat{N} = \frac{N_s L^2}{EI}, \hat{V} = \frac{VL^2}{EI}, \hat{M} = \frac{ML}{EI} \quad (3ข)$$

ตัวแปร \hat{s}_t ความยาวไร้หน่วยของโครงสร้าง \hat{s} คือค่าพิกัดตามความยาวส่วนโค้งแบบไร้หน่วย \hat{w} , \hat{N} , \hat{V} และ \hat{M} คือค่าไร้หน่วยของน้ำหนักโครงสร้าง แรงอัดตามแนวแกน แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามลำดับ จากสมการที่ (3ก) และ (3ข) ทำให้สามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหาสมการที่ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูปของสมการไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}^*} = \hat{s}_t \sin \theta \quad (4ก)$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}^*} = \hat{s}_t \cos \theta \quad (4ข)$$

$$\frac{d\theta}{d\hat{s}^*} = \hat{s}_t \hat{M} \quad (4ค)$$

$$\frac{d\hat{N}}{d\hat{s}^*} = \hat{V} \frac{d\theta}{d\hat{s}^*} - \hat{s}_t \hat{w} \sin \theta \quad (4ง)$$

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{s}^*} = -\hat{N} \frac{d\theta}{d\hat{s}^*} - \hat{s}_t \hat{w} \cos \theta \quad (4ฉ)$$

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{s}^*} = \hat{s}_t \hat{V} \quad (4จ)$$

ระบบสมการที่ (4) จัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขของเขตแบบ 2 จุด ซึ่งในการศึกษานี้ได้ใช้วิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งได้กำหนดเงื่อนไขของจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของโครงสร้างดังนี้ ที่จุดรองรับด้านซ้าย (จุด A) ของโครงสร้างกำหนดให้อยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 0$ และ

$\hat{y} = 0$ ขณะที่จุดรองรับด้านขวา (จุด B) ของโครงสร้างอยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 1$ และ $\hat{y} = 0$ เนื่องจากจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคานเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นโมเมนต์ดัด (\hat{M}) ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานเท่ากับศูนย์ อย่างไรก็ตาม ค่ามุม (θ) แรงเฉือน (\hat{V}) และแรงอัดตามแนวแกน (\hat{N}) ที่จุดรองรับ B เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรไม่ทราบค่านี้เป็น θ_B, \hat{V}_B และ \hat{N}_B ตามลำดับ ดังนั้นในกระบวนการคำนวณ ค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างของโครงสร้าง ทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการไร้มุมดังต่อไปนี้

จุดรองรับ A ($s^* = 0$):

$$\hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_A, \hat{V} = \hat{V}_A, \hat{N} = \hat{N}_A \quad (5)$$

จุดรองรับ B ($s^* = 1$):

$$\hat{x} = 1, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_B, \hat{V} = \hat{V}_B, \hat{N} = \hat{N}_B \quad (6)$$

กระบวนการหาค่าตอบเชิงตัวเลขสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกให้กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม S_t (ความยาวส่วนโค้งของโครงสร้างแบบไร้มุม) กำหนดน้ำหนักของคาน (\hat{w}) ซึ่งเป็นค่าคงที่ และค่าเงื่อนไขขอบเขต (\hat{x}, \hat{y} และ \hat{M} ที่ $s^* = 1$) จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งประกอบด้วย θ และ \hat{V} ที่ $s^* = 1$ ให้เท่ากับ θ_B และ \hat{V}_B ตามลำดับ และประมาณค่าแรงอัดไร้มุม (\hat{N}_B) โดยอาศัยทฤษฎีของโครงสร้างที่แอนดัวน้อยแบบเป็นเชิงเส้นเพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้น จากนั้น อินทิเกรตสมการครอบคลุมปัญหาทั้ง 6 สมการ (สมการที่ (4)) ตามพิกัดส่วนโค้งของคานจาก $s^* = 1$ ถึง $s^* = 0$ (จากจุด B ถึงจุด A) ด้วยวิธี Cash-Karp Runge-Kutta อันดับที่ 5 โดยควบคุม Step Size ของการอินทิเกรต เพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ การศึกษานี้ใช้ Step Size เท่ากับ 0.01 จากนั้นใช้กระบวนการทำซ้ำ Newton-Raphson เพื่อทำการปรับแก้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ($\theta_B, \hat{V}_B, \hat{N}_B$) จนกระทั่งผลลัพธ์เข้าสู่และสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (7) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-12}

$$\text{Min}_{\theta_B, \hat{V}_B, \hat{N}_B} \Phi = |\hat{x}(0)| + |\hat{y}(0)| + |\hat{M}(0)| = 0 \quad (7)$$

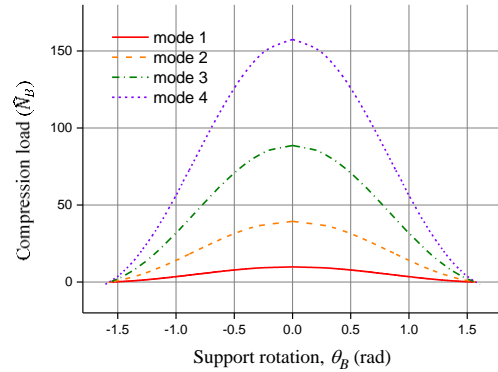
ขั้นตอนสุดท้ายให้บวกส่วนเพิ่ม ΔS_t เข้ากับค่าตัวแปรควบคุม S_t และทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นทั้งหมดเพื่อสร้างเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่าง θ_B และ \hat{N}_B

3. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

3.1 ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลขกรณีไม่พิจารณาน้ำหนักคาน ($\hat{w} = 0$)

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธียิงเป้า จึงนำคำตอบที่ได้มาเปรียบเทียบกับคำตอบจากงานวิจัยในอดีตของ Chucheepeksakul และ Monprapussorn [6] ซึ่งใช้วิธีอินทิเกรตเชิงรี (Elliptic Integral Method, EIM) ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข ซึ่งงานวิจัยดังกล่าวนี้ได้วิเคราะห์หาลำเลียงของไหลที่มีความ

ยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ซึ่งพบว่าแรงจากของไหลภายในท่อเปรียบเสมือนแรงอัดกระทำที่ปลายท่อ ซึ่งผลคำตอบที่ได้จึงสามารถนำมาเปรียบเทียบกับกรณีศึกษาที่ใด อย่างไรก็ดี กรณีที่ทำการเปรียบเทียบนี้ไม่ได้พิจารณาน้ำหนักของโครงสร้าง ($\hat{w} = 0$)



รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\hat{w} = 0$

ตารางที่ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของโครงสร้างคาน-เสากรณี $\hat{w} = 0$

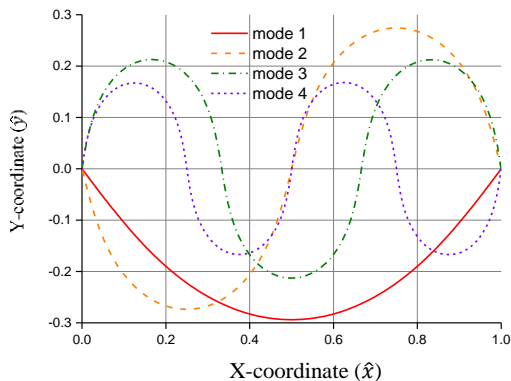
Mode	S_t	θ_A	θ_B	\hat{y}_{max}	\hat{V}_{max}	\hat{M}_{max}	\hat{N}_B
1	1.2	0.83	-0.83	-0.30	5.53	-2.21	5.04
	1.4	1.10	-1.10	-0.43	5.26	-2.54	2.66
	1.6	1.28	-1.28	-0.55	4.57	-2.61	1.38
	1.8	1.40	-1.40	-0.65	3.90	-2.57	0.66
	2.0	1.50	-1.50	-0.75	3.32	-2.49	0.24
2	1.2	-0.83	-8.32	0.15	22.12	4.42	20.17
	1.4	-1.10	-1.10	0.22	21.05	5.09	10.62
	1.6	-1.28	-1.28	0.27	-18.29	5.21	5.51
	1.8	-1.40	-1.40	0.33	-15.60	5.13	2.64
	2.0	-1.50	-1.50	0.37	-13.29	4.97	0.97
3	1.2	-0.83	0.83	-0.10	49.79	-6.63	45.40
	1.4	-1.10	1.10	-0.14	47.39	-7.64	23.96
	1.6	-1.28	1.28	-0.18	41.16	-7.82	12.40
	1.8	-1.40	1.40	-0.22	35.09	-7.70	5.98
	2.0	-1.50	1.50	-0.25	29.90	-7.46	2.15
4	1.2	0.83	0.83	0.07	88.52	-8.38	80.67
	1.4	1.10	1.11	0.10	84.22	9.61	42.75
	1.6	1.28	1.27	-0.13	-73.15	-9.81	22.15
	1.8	1.40	1.40	0.15	62.43	-9.64	10.57
	2.0	1.50	1.50	0.18	53.19	-9.31	3.91

จากผลการวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ระหว่างระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ของการโก่งเคาะ 4 โหมดแรกของโครงสร้างคาน-เสาแสดงดังรูปที่ 3 และผลคำตอบเชิงตัวเลขได้แสดงไว้ในตารางที่ 1 ได้แก่ค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของโครงสร้าง (S_t) มุมที่จุดรองรับ A (θ_A) มุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ค่าการแอนตัวสูงสุด (\hat{y}_{max}) ค่าแรงเฉือนสูงสุด (\hat{V}_{max}) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด (\hat{M}_{max}) และค่าแรงอัดไร้มุมที่ปลายด้านขวา (\hat{N}_B)

จากรูปที่ 3 พบว่าเมื่อแรงอัดที่ปลายโครงสร้างค่อยๆเพิ่มขึ้นแต่โครงสร้างยังไม่เกิดการเสียรูป จนกระทั่งแรงอัดเพิ่มขึ้นจนถึงค่าที่มากที่สุด (ที่ $\theta_B = 0$ rad) ซึ่งเรียกว่าแรงอัดวิกฤติ (\hat{N}_{Bcr}) ซึ่งทำให้โครงสร้างเกิดการโก่งเดาะ ที่สภาวะนี้เรียกว่าสภาวะสมดุลวิกฤติ (Critical Equilibrium) หลังจากนั้นโครงสร้างจะแสดงพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ โดยโครงสร้างจะเริ่มเกิดการแอ่นตัวมากขึ้นในขณะที่แรงอัดที่ปลายโครงสร้างจะลดลง ซึ่งสภาวะนี้เรียกว่าสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ (Unstable Equilibrium) การโก่งเดาะของโครงสร้างภายใต้แรงอัดสามารถเกิดขึ้นได้หลายโหมดขึ้นอยู่กับแรงอัดที่กระทำกับโครงสร้าง ซึ่งการโก่งเดาะในโหมดที่ 1 มีค่าต่ำที่สุดและจะเกิดขึ้นง่ายที่สุด ตัวอย่างรูปร่างการโก่งเดาะของโครงสร้างแต่โหมดแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งการโก่งเดาะทุกโหมดที่แสดงในรูปนี้เกิดขึ้นภายใต้แรงอัดที่ปลายโครงสร้างเท่ากัน ($\hat{N}_B = 5$) จากรูปที่ 4 พบว่ารูปร่างการโก่งเดาะของโหมดที่ 1 จะไม่มีจุดดัดกลับ (Inflection Point) ขณะที่รูปร่างของโหมดที่ 2 3 และ 4 จะมีจำนวนจุดดัดกลับเท่ากับ 1 2 และ 3 จุดตามลำดับ กล่าวคือจำนวนจุดดัดกลับจะเท่ากับ $n - 1$ เมื่อ n คือลำดับโหมดของการโก่งเดาะ

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลค่าตอบเชิงตัวเลขที่สภาวะวิกฤติของโครงสร้างสำหรับกรณีที่ไม่พิจารณาน้ำหนักโครงสร้าง ($\hat{w} = 0$)

Mode	θ_B		\hat{Y}_{max}		\hat{S}_t		\hat{N}_{Bcr}	
	EIM	SM	EIM	SM	EIM	SM	EIM	SM
1	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	9.8696	9.8695
2	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	39.4784	39.4763
3	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	88.8264	88.7801
4	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	157.9136	157.5752



รูปที่ 4 รูปร่างการโก่งเดาะของโครงสร้างทั้ง 4 โหมด กรณี $\hat{w} = 0$ และแรงอัดที่ปลาย $\hat{N}_B = 5$

ผลค่าตอบเชิงตัวเลขที่สภาวะวิกฤติของโครงสร้าง ซึ่งสามารถหาได้จากจุดสูงสุดบนเส้นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) (รูปที่ 3) ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยได้เปรียบเทียบผลค่าตอบที่ได้จากวิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) ของงานวิจัยนี้กับคำตอบจากวิธีอินทิกรัลวงรี (Elliptic Integral Method, EIM) จากงานวิจัยของ Chucheepeksul และ Monprapussorn [6] โดยผลการวิเคราะห์ที่นำมาเปรียบเทียบกันได้แก่ค่ามุมที่จุดรองรับ A (θ_A) ค่าการแอ่นตัวสูงสุด (\hat{Y}_{max}) ค่าความยาว

ส่วนโค้งทั้งหมดของโครงสร้าง (\hat{S}_t) และแรงอัดวิกฤติของแต่ละโหมด (\hat{N}_{Bcr}) ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากทั้ง 2 วิธีนี้มีความสอดคล้องกันมาก อย่างไรก็ตามพบว่าแรงอัดวิกฤติไร้น้ำหนักจะมีค่าเข้าใกล้กับ $\hat{N}_{Bcr} \approx (n\pi)^2$ โดยที่ n คือลำดับโหมดของการโก่งเดาะ ซึ่งแรงอัดวิกฤติของโครงสร้างที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้นี้จะตรงกับแรงอัดวิกฤติของเสาที่ได้จากกระบวนการเชิงวิเคราะห์แบบเป็นเชิงเส้น แต่พบว่าพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้จะต่างจากพฤติกรรมของเสาทั่วไป และเมื่อมีแรงด้านข้างกระทำร่วมด้วยพฤติกรรมของโครงสร้างก็จะต่างออกไป ซึ่งได้นำเสนอในหัวข้อถัดไปนี้

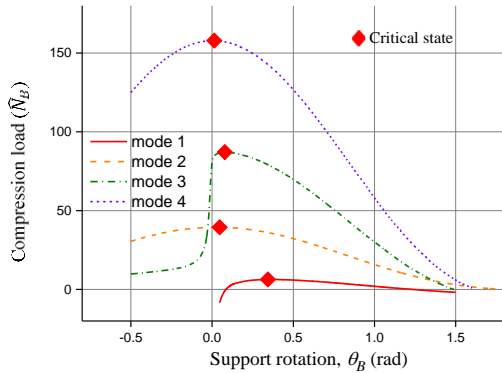
3.2 ผลกระทบของแรงด้านข้างจากน้ำหนักของโครงสร้างต่อพฤติกรรม การโก่งเดาะ ($\hat{w} \neq 0$)

ตารางที่ 3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของโครงสร้างกรณี $\hat{w} = 6$

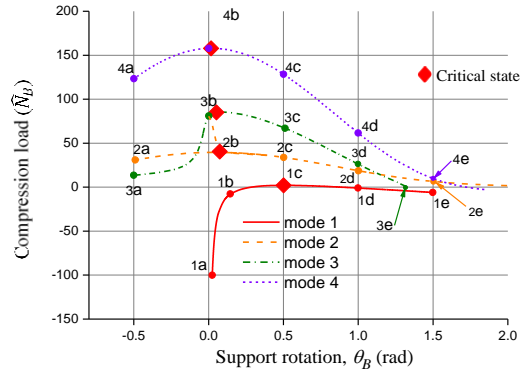
Mode	\hat{S}_t	θ_A	θ_B	\hat{Y}_{max}	\hat{V}_{max}	\hat{M}_{max}	\hat{N}_B
1	1.2	-0.83	0.83	0.29	-5.86	2.20	0.46
	1.4	-1.10	1.10	0.43	-5.35	2.56	-2.00
	1.6	-1.27	1.27	0.55	-4.43	2.65	-3.65
	1.8	-1.39	1.39	0.65	3.69	2.65	-4.83
	2.0	-1.47	1.47	0.75	-3.32	2.62	-5.75
2	1.2	0.94	0.70	-0.17	21.98	-4.57	20.45
	1.4	1.28	0.92	-0.25	21.03	-5.28	11.03
	1.6	1.53	1.02	-0.32	18.46	-5.43	6.09
	1.8	1.75	1.07	-0.39	16.10	-5.39	3.39
	2.0	1.98	1.08	-0.45	14.37	-5.30	1.80
3	1.2	-0.78	0.78	-0.11	49.79	-6.74	45.00
	1.4	-1.03	1.03	-0.17	47.40	-7.77	23.60
	1.6	-1.17	1.17	-0.22	41.19	-7.98	12.15
	1.8	-1.26	1.26	-0.26	35.18	-7.88	5.71
	2.0	-1.31	1.30	-0.31	30.09	-7.67	1.97
4	1.2	0.86	0.80	-0.08	88.50	-8.44	80.73
	1.4	1.14	1.06	-0.11	84.23	-9.68	42.79
	1.6	1.34	1.21	-0.14	73.19	-9.90	22.27
	1.8	1.49	1.32	-0.17	62.48	-9.76	10.75
	2.0	1.61	1.38	-0.20	53.34	-9.47	4.13

เพื่อศึกษาผลกระทบของแรงด้านข้างจากน้ำหนักโครงสร้างต่อพฤติกรรมการโก่งเดาะของโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์ เส้นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ภายใต้น้ำหนักโครงสร้าง $\hat{w} = 2, 4, 6$ และ 8 ได้แสดงในรูปที่ 5-8 ตามลำดับ และผลการคำนวณเชิงตัวเลขของกรณีตัวอย่างที่ $\hat{w} = 6$ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 3 ซึ่งประกอบด้วยค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของโครงสร้าง (\hat{S}_t) มุมที่จุดรองรับ A (θ_A) มุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ค่าการแอ่นตัวสูงสุด (\hat{Y}_{max}) ค่าแรงเฉือนสูงสุด (\hat{V}_{max}) ค่า

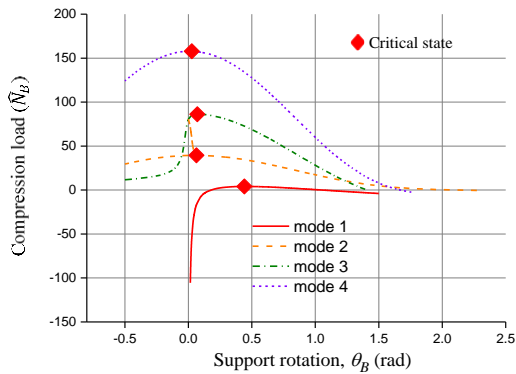
โมเมนต์ดัดสูงสุด (\hat{M}_{max}) และค่าแรงอัดไว้หน่วยที่ปลายด้านขวา (\hat{N}_B)



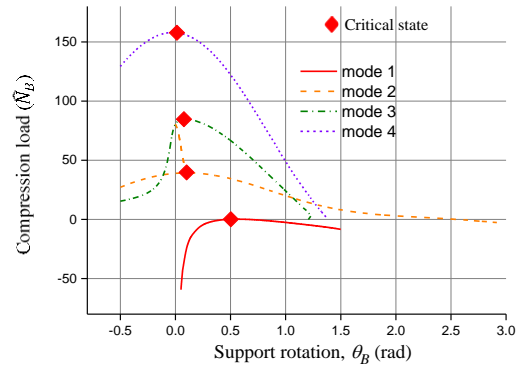
รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\hat{\psi} = 2$



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\hat{\psi} = 6$



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\hat{\psi} = 4$

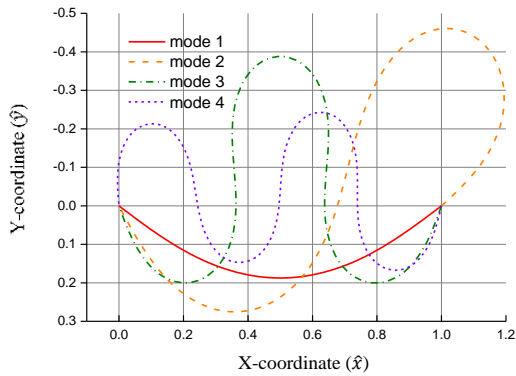


รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\hat{\psi} = 8$

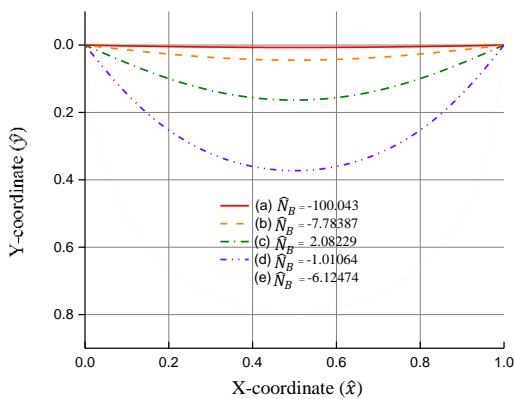
ตารางที่ 4 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่สภาวะวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสา

$\hat{\psi}$	Mode	\hat{S}_t	θ_A	θ_B	\hat{y}_{max}	\hat{V}_{max}	\hat{M}_{max}	\hat{N}_{Bcr}	% Buckling load*
2	1	1.03280	-0.35887	0.35887	0.11589	-3.47572	1.08259	6.32515	100
	2	1.00019	0.02282	-0.02786	-0.00891	0.33345	-0.10376	39.47308	624
	3	1.00180	-0.07405	0.07403	-0.01226	-7.47217	-0.82261	87.18394	1378
	4	1.00007	-0.00943	-0.02210	-0.00277	-2.48926	-0.20502	157.84769	2496
4	1	1.05200	-0.44940	0.44940	0.14637	-4.30091	1.32546	4.07407	100
	2	1.00075	0.05040	-0.05067	-0.01777	0.63538	-0.20219	39.58166	972
	3	1.00290	-0.08498	0.08495	-0.01793	-9.85830	-1.05336	86.22372	2116
	4	1.00004	0.01594	-0.00580	-0.00367	1.08544	-0.115329	157.87403	3875
6	1	1.06770	-0.51049	0.51049	0.16742	-4.83850	1.47905	2.08456	100
	2	1.00019	0.01892	-0.01893	-0.01398	1.76356	-0.28411	74.00833	3550
	3	1.00380	-0.08775	0.08772	-0.02282	-10.53774	-1.20974	85.41382	4097
	4	1.00008	0.01887	-0.01910	-0.00475	0.45995	-0.07597	157.97282	7578
8	1	1.08120	-0.55694	0.55694	0.18375	-5.23687	1.58975	0.22827	100
	2	1.00309	0.11027	-0.09446	-0.03599	1.30688	-0.41245	39.35958	17243
	3	1.00490	-0.09103	0.09099	-0.02785	11.76699	-1.37248	84.68813	37100
	4	1.00014	0.03245	-0.01825	-0.006843	1.28075	-0.15119	157.86157	69156

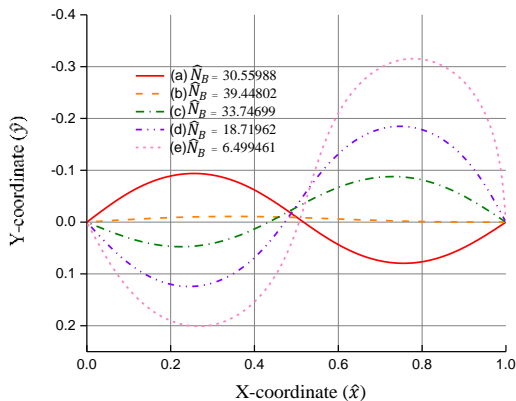
หมายเหตุ % Buckling load* คือร้อยละของค่าแรงอัดวิกฤติที่เทียบกับโหมดการโก่งเดาะที่ 1



รูปที่ 9 รูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างทั้ง 4 โหมดกรณีที่มี $\hat{W} = 6$ และ $\hat{N}_B = 1$



รูปที่ 10 รูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างในโหมดที่ 1 ภายใต้แรงอัดต่างๆ

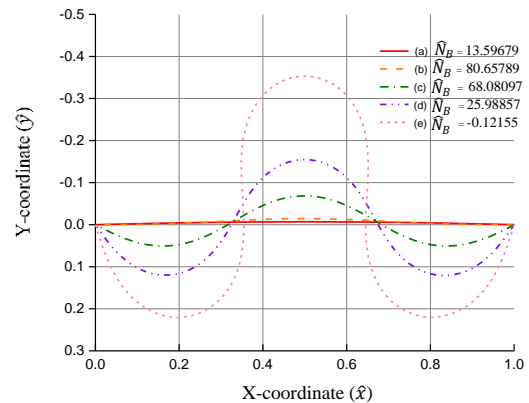


รูปที่ 11 รูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างในโหมดที่ 2 ภายใต้แรงอัดต่างๆ

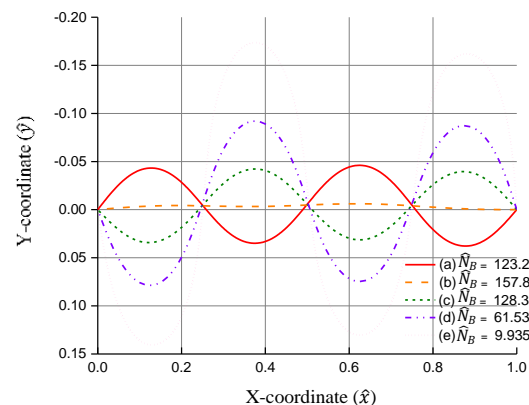
ในที่นี้ จะอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างในกรณีที่มี $\hat{W} = 6$ ซึ่งรูปที่ 7 แสดงเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง (\hat{N}_B) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ของโหมดการเสียรูปทั้ง 4 แบบ สำหรับโหมดที่ 1 (เส้น 1a-1e) พบว่าจุดที่เกิดการโก่งคดคือจุด 1c (Critical Point) สำหรับช่วง 1a-1c โครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ (Stable Equilibrium) คือสภาวะที่ค่า θ_B เพิ่มขึ้นพร้อมกับค่า \hat{N}_B เพิ่มมากขึ้น ขณะที่ช่วง 1c-1e โครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ (Unstable Equilibrium) คือสภาวะที่ค่า θ_B เพิ่มขึ้นแต่ค่า \hat{N}_B ลดลง อย่างไรก็ตาม สำหรับโหมดที่ 2 3 และ 4 จะไม่เกิดสภาวะสมดุลแบบมี

เสถียรภาพ จะพบเฉพาะสภาวะสมดุลวิกฤติและสภาวะสมแบบไร้เสถียรภาพ โดยมีสภาวะสมดุลวิกฤติอยู่ที่จุด 2b 3b และ 4b สำหรับโหมดการโก่งคดที่ 2 3 และ 4 ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่าโครงสร้างเปลี่ยนแปลงการโก่งคดจากโหมดที่ 2 ไปยังโหมดที่ 3 ตามเส้นโค้ง 2b-3b ดังแสดงในรูปที่ 7 ทั้งนี้ค่าแรงอัดวิกฤติของโครงสร้าง (\hat{N}_{Bcr}) สำหรับโหมดการโก่งคดที่ 1-4 ภายใต้น้ำหนัก $\hat{W} = 2, 4, 6,$ และ 8 ได้แสดงไว้ในตารางที่ 4

รูปที่ 9 แสดงเปรียบเทียบรูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างทั้ง 4 รูปแบบในกรณีที่มีน้ำหนัก (\hat{W}) เท่ากับ 6 และมีค่าแรงอัดไร้หน่วยที่ปลายที่ด้านขวาเท่ากัน ($\hat{N}_B = 1$) รูปที่ 10-13 แสดงรูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างตั้งแต่โหมดที่ 1-4 ตามลำดับ สำหรับกรณีที่มี $\hat{W} = 6$ ซึ่งพิจารณาที่จุด a b c d และ e บนเส้นกราฟในรูปที่ 7



รูปที่ 12 รูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างในโหมดที่ 3 ภายใต้แรงอัดต่างๆ



รูปที่ 13 รูปร่างการโก่งคดของโครงสร้างในโหมดที่ 4 ภายใต้แรงอัดต่างๆ

4. สรุป

งานวิจัยนี้นำเสนอสมการครอบคลุมปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 แบบไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งคดของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้วิธียิงเป้าในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข ซึ่งผลเฉลยที่ได้เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตที่วิเคราะห์ได้จากวิธีอิลิปติกอนทิกัลพบว่าผลลัพธ์ทั้งสองมีความสอดคล้องกันโดยจะมีค่าต่างกันไม่เกิน 0.05% จากการวิเคราะห์

พฤติกรรมการโก่งเดาะของโครงสร้างภายใต้แรงอัดที่ปลายโดยคำนึงถึงผลกระทบจากแรงทางด้านข้าง พบว่าแรงทางด้านข้างทำให้แรงอัดวิกฤติและเสถียรภาพของโครงสร้างลดลง ซึ่งโครงสร้างสามารถเกิดการโก่งเดาะได้หลายรูปแบบ ได้แก่ โหมดที่ 1 ซึ่งเป็นโหมดที่มีรูปร่างการโก่งเดาะที่ปราศจากจุดดัดกลับ สำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 2 3 และ 4 จะพบจำนวนจุดดัดกลับเท่ากับ 1 2 และ 3 ตามลำดับ สำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1 จะมีสภาวะสมดุล 3 รูปแบบ ได้แก่ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ สภาวะสมดุลวิกฤติ และสภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ สำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 2 3 และ 4 จะมีสภาวะสมดุลเพียง 2 รูปแบบ คือ สภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ และสภาวะสมดุลวิกฤติ นอกจากนี้รูปแบบการโก่งเดาะในโหมดที่ 2 สามารถเปลี่ยนเป็นการโก่งเดาะในโหมดที่ 3 ได้

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความอนุเคราะห์สถานที่สำหรับการทำวิจัยและสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

[1] สุนิสา รอดสังวาลย์. 2541. การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยวิธีไฟไนติเอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

- [2] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์. 2538. การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.
- [3] ครุณย์ ชุ่มกลัด. 2560. ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มี ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.
- [4] Athisakul, C. Monprapussorn T., and Chucheepsakul, S. (2008). "Effect of Inclination on Bending of Variable-Arc-Length-Beams Subjected to Uniform Self-Weight," *Engineering Structure*, 30, pp. 902-908.
- [5] การันต์ คล้ายฉ่ำ. 2562. น้ำหนักวิกฤติของคานเอียงต่างระดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงดิ่งที่จุดรองรับ. *วารสารวิจัยและพัฒนา มจร.*, 42(3), pp. 263-278.
- [6] Chucheepsakul S., and Monprapussorn T. (2000). Divergence instability of variable-arc-length elastica pipes transporting fluid. *Fluids and Structures*, 14, pp.895-916.