แรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

Critical Compression Load of Variable Arc Length Beam-Column Structure

ธนภัทร วัฒนาบุญศิริ[1] อินทัช ด่านปาน[1] ธนนพ เหมือนเหลา[1] และการันต์ คล้ายฉ่ำ[2,*]

[1] นิสิตปริญญาตรี ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ. นครปฐม

[2] อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จ. นครปฐม

**Corresponding author; E-mail address: karun.kl@ku.ac.th*

บทคัดย่อ

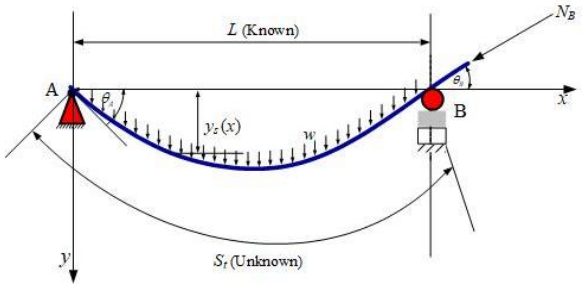
บทความนี้นำเสนอค่าแรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ คาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้เป็นโครงสร้างประเภทอิลาสติกคา ซึ่งปลายของโครงสร้างนี้สามารถเลื่อนผ่านจุดรองรับเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกที่มากระทำ ส่งผลให้ความยาวส่วนโค้งของคานเปลี่ยนไป สมการครอบคลุมปัญหาของคาน-เสาสร้างจากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างคาน-เสา และจากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ ชุดสมการครอบคลุมปัญหาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 แบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจัดเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด ผลคำตอบเชิงตัวเลขหาได้โดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้า ผลการศึกษาเชิงตัวเลขมุ่งเน้นศึกษาผลกระทบของแรงกระทำทางขวาง ได้แก่น้ำหนักของโครงสร้างต่อค่าแรงอัดวิกฤติสำหรับ 4 โหมดแรกของการโก่งเดาะ และพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างคาน-เสา ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าผลของแรงกระทำทางด้านข้างทำให้แรงอัดวิกฤติลดลงและทำให้โครงสร้างเสียเสถียรภาพ

คำสำคัญ: คาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้, แรงอัดวิกฤติ, พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ, ระเบียบวิธียิงเป้า

ดังนั้นงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะและหาแรงอัดวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยพิจารณาผลกระทบจากแรงกระทำด้านข้างของคานด้วย งานวิจัยนี้ได้สร้างสมการทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นและใช้วิธียิงเป้า (Shooting Method) สำหรับหาคำตอบเชิงตัวเลข

2. สมการที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์

รูปที่ 1 แสดงลักษณะทางกายภาพของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีจุดรองรับทั้ง 2 ด้านอยู่ในระดับเดียวกัน ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอเนื่องจากน้ำหนักของโครงสร้าง (w) และแรงอัดที่จุดรองรับด้านขวา (N_B) ปลายด้านขวาของโครงสร้างพาดอยู่บนจุดรองรับที่ยอมให้โครงสร้างเลื่อนสไลด์ผ่านได้ ดังนั้นเมื่อมีแรงมากระทำจะทำให้ความยาวส่วนโค้งของคาน-เสา (S_t) สามารถแปรเปลี่ยนได้ ขณะที่ระยะห่างระหว่างจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคาน-เสาหรือความยาวช่วงมีค่าคงที่ (L) จากการแอ่นตัวมากของคาน-เสา จะทำให้คานแอ่นตัวจากตำแหน่งก่อนการเสียรูปไปยังตำแหน่งของคานที่สภาวะสมดุลสถิตย์ (y_s)



รูปที่ 1 ลักษณะการแอ่นตัวมากของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดที่จุดรองรับ B

รูปที่ 2 แสดงผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีความยาวส่วนโค้งน้อย ๆ (ds_s) จากรูปนี้ สมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบโดยอ้างอิงทฤษฎีอิลาสติกคาสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{dy_s}{ds_s} = sin\,\theta \tag{1ก}$$

$$\frac{dx}{ds_s} = cos\,\theta \tag{1ข}$$

$$\frac{d\theta}{ds_s} = \kappa = -\frac{M}{EI} \tag{1ค}$$

โดยที่ตัวแปร θ คือมุมระหว่างแนวราบกับแนวสัมผัสของโครงสร้าง s_s คือพิกัดตามความยาวส่วนโค้งของคาน และ x คือพิกัดตามระยะในแนวราบของโครงสร้าง ตัวแปร E และ I คือโมดูลัสยืดหยุ่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดโครงสร้าง ตามลำดับ

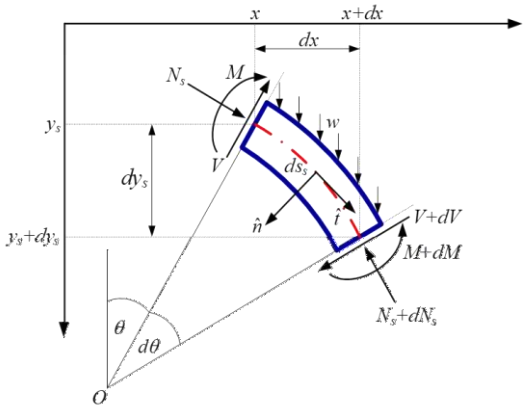
จากรูปที่ 2 สมการสมดุลของโครงสร้างคาน-เสาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งประกอบด้วยสมการสมดุลของแรงตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสียรูปของโครงสร้างดังสมการที่ (2ก) และ (2ข) ขณะที่สมการที่ (2ค) คือสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O

$$\frac{dN_s}{ds_s} = V\frac{d\theta}{ds_s} - w\sin\theta \tag{2ก}$$

$$\frac{dV}{ds_s} = -N_s\frac{d\theta}{ds_s} - w\sin\theta \tag{2ข}$$

$$\frac{dM}{ds_s} = V \tag{2ค}$$

ตัวแปร N_s M และ V คือแรงอัดตามแนวแกน โมเมนต์ดัดและแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่าง ๆของคาน ตามลำดับ



รูปที่ 2 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างคาน-เสา

สมการที่ (1) และ (2) เป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งจำเป็นต้องหาคำตอบด้วยวิธีการเชิงตัวเลข เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจำเป็นต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไร้หน่วย ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$s^* = \frac{s_s}{s_t}, \hat{s}_t = s_t/L, \hat{x} = \frac{x}{L}\ , \hat{y} = \frac{y_s}{L}, \hat{s} = \frac{s_s}{L} \tag{3ก}$$

$$\widehat{w} = \frac{wL^3}{EI}, \widehat{N} = \frac{N_sL^2}{EI}, \widehat{V} = \frac{VL^2}{EI}, \widehat{M} = \frac{ML}{EI} \tag{3ข}$$

ตัวแปร $\hat{s}_t$ ความยาวไร้หน่วยของโครงสร้าง $\hat{s}$ คือค่าพิกัดตามความยาวส่วนโค้งแบบไร้หน่วย $\widehat{w}$ $\widehat{N}$ $\widehat{V}$ และ $\widehat{M}$ คือค่าไร้หน่วยของน้ำหนักโครงสร้าง แรงอัดตามแนวแกน แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามลำดับ จากสมการที่ (3ก) และ (3ข) ทำให้สามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหาสมการที่ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูปของสมการไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{y}}{ds^*} = \hat{s}_t\,sin\,\theta \tag{4ก}$$

$$\frac{d\hat{x}}{ds^*} = \hat{s}_t\cos\theta \tag{4ข}$$

$$\frac{d\theta}{ds^*} = \hat{s}_t\widehat{M} \tag{4ค}$$

$$\frac{d\widehat{N}}{ds^*} = \widehat{V}\frac{d\theta}{ds^*} - \hat{s}_t\widehat{w}\,sin\,\theta \tag{4ง}$$

$$\frac{d\widehat{V}}{ds^*} = -\widehat{N}\frac{d\theta}{ds^*} - \hat{s}_t\widehat{w}\,cos\,\theta \tag{4จ}$$

$$\frac{d\widehat{M}}{ds^*} = \hat{s}_t\widehat{V} \tag{4ฉ}$$

ระบบสมการที่ (4) จัดเป็นปัญหาค่าเงื่อนไขของเขตแบบ 2 จุด ซึ่งในการศึกษานี้ได้ใช้วิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งได้กำหนดเงื่อนไขของจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของโครงสร้างดังนี้ ที่จุดรองรับด้านซ้าย (จุด A) ของโครงสร้างกำหนดให้อยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 0$ และ

$\hat{y} = 0$ ขณะที่จุดรองรับด้านขวา (จุด B) ของโครงสร้างอยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 1$ และ $\hat{y} = 0$ เนื่องจากจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคานเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นโมเมนต์ดัด $(\hat{M})$ ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานเท่ากับศูนย์ อย่างไรก็ดี ค่ามุม (θ) แรงเฉือน $(\hat{V})$ และแรงอัดตามแนวแกน $(\hat{N})$ ที่จุดรองรับ B เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจำเป็นต้องเดาค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรไม่ทราบค่านี้เป็น $\theta_B, \hat{V}_B$ และ $\hat{N}_B$ ตามลำดับ ดังนั้นในกระบวนการคำนวณ ค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองข้างของโครงสร้าง ทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการไร้หน่วยดังต่อไปนี้

จุดรองรับ A $(s^* = 0)$:

$$\hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_A, \hat{V} = \hat{V}_A, \hat{N} = \hat{N}_A \quad (5)$$

จุดรองรับ B $(s^* = 1)$:

$$\hat{x} = 1, \hat{y} = 0, \hat{M} = 0, \theta = \theta_B, \hat{V} = \hat{V}_B, \hat{N} = \hat{N}_B \quad (6)$$

กระบวนการหาคำตอบเชิงตัวเลขสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกให้กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม $\hat{s}_t$ (ความยาวส่วนโค้งของโครงสร้างแบบไร้หน่วย) กำหนดน้ำหนักของคาน $(\hat{w})$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ และค่าเงื่อนไขขอบเขต ($\hat{x}$, $\hat{y}$ และ $\hat{M}$ ที่ $s^* = 1$) จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งประกอบด้วย θ และ $\hat{V}$ ที่ $s^* = 1$ ให้เท่ากับ θ_B และ $\hat{V}_B$ ตามลำดับ และประมาณค่าแรงอัดไร้หน่วย $(\hat{N}_B)$ โดยอาศัยทฤษฎีของโรงสร้างที่แอ่นตัวน้อยแบบเป็นเชิงเส้นเพื่อใช้เป็นค่าเดาเริ่มต้น จากนั้น อินทริเกรตสมการครอบคลุมปัญหาทั้ง 6 สมการ (สมการที่ (4)) ตามพิกัดส่วนโค้งของคานจาก $s^* = 1$ ถึง $s^* = 0$ (จากจุด B ถึงจุด A) ด้วยวิธี Cash-Karp Runge-Kutta อันดับที่ 5 โดยควบคุม Step Size ของการอินทริเกรต เพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ การศึกษานี้ใช้ Step Size เท่ากับ 0.01 จากนั้นใช้กระบวนการทำซ้ำ Newton-Raphson เพื่อทำการปรับแก้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (θ_B, $\hat{V}_B$, $\hat{N}_B$) จนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้าและสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (7) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-12}

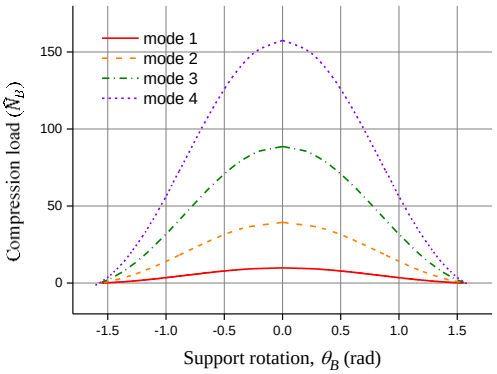
$$\underset{\theta_B, \hat{V}_B, \hat{N}_B}{\text{Min}} \; \Phi = |\hat{x}(0)| + |\hat{y}(0)| + |\hat{M}(0)| = 0 \quad (7)$$

ขั้นตอนสุดท้ายให้บวกส่วนเพิ่ม $\Delta\hat{s}_t$ เข้ากับค่าตัวแปรควบคุม $\hat{s}_t$ และทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นทั้งหมดเพื่อสร้างเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่าง θ_B และ $\hat{N}_B$

3. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

3.1 ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลขกรณีไม่พิจารณาน้ำหนักคาน $(\hat{w} = 0)$

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธียิงเป้า จึงนำคำตอบที่ได้มาเปรียบเทียบกับคำตอบจากงานวิจัยในอดีตของ Chucheepsakul และ Monprapussorn [6] ซึ่งใช้วิธีอีลิปติคอินทิกรัล (Elliptic Integral Method, EIM) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งงานวิจัยดังกล่าวนี้ได้วิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ซึ่งพบว่าแรงจากของไหลภายในท่อเปรียบเสมือนแรงอัดกระทำที่ปลายท่อ ซึ่งผลคำตอบที่ได้จึงสามารถนำมาเปรียบเทียบกับการศึกษานี้ได้ อย่างไรก็ดี กรณีที่ทำการเปรียบเทียบนี้ไม่ได้พิจารณาน้ำหนักของโครงสร้าง $(\hat{w} = 0)$



รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง $(\hat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\hat{w} = 0$

ตารางที่ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของโครงสร้างคาน-เสากรณีที่ $\hat{w} = 0$

Mode	$\hat{S}_t$	θ_A	θ_B	$\hat{y}_{max}$	$\hat{V}_{max}$	$\hat{M}_{max}$	$\hat{N}_B$
1	1.2	0.83	-0.83	-0.30	5.53	-2.21	5.04
	1.4	1.10	-1.10	-0.43	5.26	-2.54	2.66
	1.6	1.28	-1.28	-0.55	4.57	-2.61	1.38
	1.8	1.40	-1.40	-0.65	3.90	-2.57	0.66
	2.0	1.50	-1.50	-0.75	3.32	-2.49	0.24
2	1.2	-0.83	-8.32	0.15	22.12	4.42	20.17
	1.4	-1.10	-1.10	0.22	21.05	5.09	10.62
	1.6	-1.28	-1.28	0.27	-18.29	5.21	5.51
	1.8	-1.40	-1.40	0.33	-15.60	5.13	2.64
	2.0	-1.50	-1.50	0.37	-13.29	4.97	0.97
3	1.2	-0.83	0.83	-0.10	49.79	-6.63	45.40
	1.4	-1.10	1.10	-0.14	47.39	-7.64	23.96
	1.6	-1.28	1.28	-0.18	41.16	-7.82	12.40
	1.8	-1.40	1.40	-0.22	35.09	-7.70	5.98
	2.0	-1.50	1.50	-0.25	29.90	-7.46	2.15
4	1.2	0.83	0.83	0.07	88.52	-8.38	80.67
	1.4	1.10	1.11	0.10	84.22	9.61	42.75
	1.6	1.28	1.27	-0.13	-73.15	-9.81	22.15
	1.8	1.40	1.40	0.15	62.43	-9.64	10.57
	2.0	1.50	1.50	0.18	53.19	-9.31	3.91

จากผลการวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ระหว่างระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง $(\hat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ของการโก่งเดาะ 4 โหมดแรกของโครงสร้างคาน-เสาแสดงดังรูปที่ 3 และผลคำตอบเชิงตัวเลขได้แสดงไว้ในตารางที่ 1 ได้แก่ค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของโครงสร้าง $(\hat{S}_t)$ มุมที่จุดรองรับ A (θ_A) มุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ค่าการแอ่นตัวสูงสุด $(\hat{y}_{max})$ ค่าแรงเฉือนสูงสุด $(\hat{V}_{max})$ ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด $(\hat{M}_{max})$ และค่าแรงอัดไร้หน่วยที่ปลายด้านขวา $(\hat{N}_B)$

จากรูปที่ 3 พบว่าเมื่อแรงอัดที่ปลายโครงสร้างค่อยๆเพิ่มขึ้นแต่โครงสร้างยังไม่เกิดการเสียรูป จนกระทั่งแรงอัดเพิ่มขึ้นจนถึงค่าที่มากที่สุด (ที่ $\theta_B = 0$ rad) ซึ่งเรียกว่าแรงอัดวิกฤติ ($\widehat{N}_{Bcr}$) ซึ่งทำให้โครงสร้างเกิดการโก่งเดาะ ที่สภาวะนี้เรียกว่าสภาวะสมดุลวิกฤติ (Critical Equilibrium) หลังจากนั้นโครงสร้างจะแสดงพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ โดยโครงสร้างจะเริ่มเกิดการแอ่นตัวมากขึ้นในขณะที่แรงอัดที่ปลายโครงสร้างจะลดลง ซึ่งสภาวะนี้เรียกว่าสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ (Unstable Equilibrium) การโก่งเดาะของโครงสร้างภายใต้แรงอัดสามารถเกิดขึ้นได้หลายโหมดขึ้นอยู่กับแรงอัดที่กระทำกับโครงสร้าง ซึ่งการโก่งเดาะในโหมดที่ 1 มีค่าต่ำที่สุดและจะเกิดขึ้นง่ายที่สุด ตัวอย่างรูปร่างการโก่งเดาะของโครงสร้างแต่โหมดแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งการโก่งเดาะทุกโหมดที่แสดงในรูปนี้เกิดขึ้นภายใต้แรงอัดที่ปลายโครงสร้างเท่ากัน ($\widehat{N}_B = 5$) จากรูปที่ 4 พบว่ารูปร่างการโก่งเดาะของโหมดที่ 1 จะไม่มีจุดดัดกลับ (Inflection Point) ขณะที่รูปร่างของโหมดที่ 2 3 และ 4 จะมีจำนวนจุดดัดกลับเท่ากับ 1 2 และ 3 จุดตามลำดับ กล่าวคือจำนวนจุดดัดกลับจะเท่ากับ $n-1$ เมื่อ n คือลำดับโหมดของการโก่งเดาะ

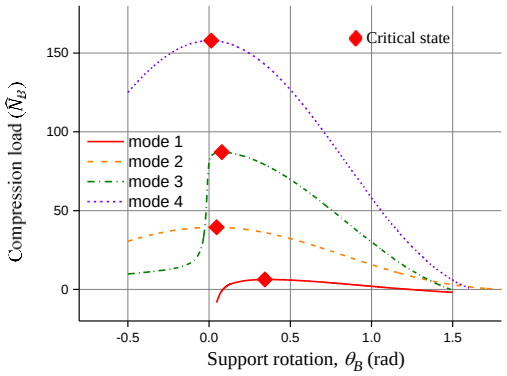
ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขที่สภาวะวิกฤติของโครงสร้างสำหรับกรณีที่ไม่พิจารณาน้ำหนักโครงสร้าง ($\widehat{w} = 0$)

Mode	θ_B		$\hat{y}_{max}$		$\hat{S}_t$		$\widehat{N}_{Bcr}$	
	EIM	SM	EIM	SM	EIM	SM	EIM	SM
1	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	9.8696	9.8695
2	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	39.4784	39.4763
3	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	88.8264	88.7801
4	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	157.9136	157.5752

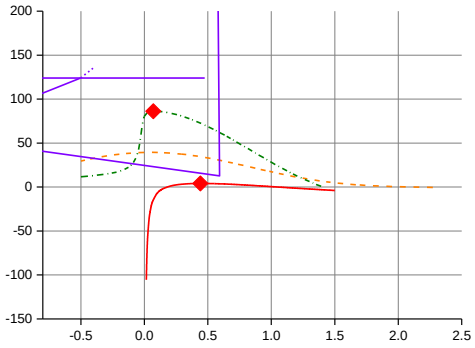
รูปที่ 4 รูปร่างการโก่งเดาะของโครงสร้างทั้ง 4 โหมด กรณี $\widehat{w} = 0$ และแรงอัดที่ปลาย $\widehat{N}_B = 5$

ผลคำตอบเชิงตัวเลขที่สภาวะวิกฤติของโครงสร้าง ซึ่งสามารถหาได้จากจุดสูงสุดบนเส้นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง ($\widehat{N}_B$) และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) (รูปที่ 3) ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 โดยได้เปรียบเทียบผลคำตอบที่ได้จากวิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) ของงานวิจัยนี้กับคำตอบจากวิธีอีลิปติคอินทิกรัล (Elliptic Integral Method, EIM) จากงานวิจัยของ Chucheepsakul และ Monprapussorn [6] โดยผลการวิเคราะห์ที่นำมาเปรียบเทียบกันได้แก่ ค่ามุมที่จุดรองรับ A (θ_A) ค่าการแอ่นตัวสูงสุด ($\hat{y}_{max}$) ค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของโครงสร้าง ($\hat{S}_t$) และแรงอัดวิกฤติของแต่ละโหมด ($\widehat{N}_{Bcr}$) ผลการเปรียบเทียบพบว่าคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากทั้ง 2 วิธีนี้มีความสอดคล้องกันมาก อย่างไรก็ดีพบว่าแรงอัดวิกฤติไร้หน่วยจะมีค่าเข้าใกล้กับ $\widehat{N}_{Bcr} \approx (n\pi)^2$ โดยที่ n คือลำดับโหมดของการโก่งเดาะ ซึ่งแรงอัดวิกฤติของโครงสร้างที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้นี้จะตรงกับแรงอัดวิกฤติของเสาที่ได้จากกระบวนการเชิงวิเคราะห์แบบเป็นเชิงเส้น แต่ทว่าพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้จะต่างจากพฤติกรรมของเสาทั่วไป และเมื่อมีแรงด้านข้างกระทำร่วมด้วยพฤติกรรมของโครงสร้างก็จะต่างออกไป ซึ่งได้นำเสนอในหัวข้อถัดไปนี้

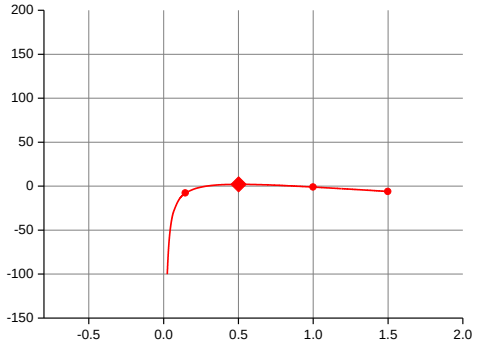
โมเมนต์ดัดสูงสุด $(\widehat{M}_{max})$ และค่าแรงอัดไร้หน่วยที่ปลายด้านขวา $(\widehat{N}_B)$



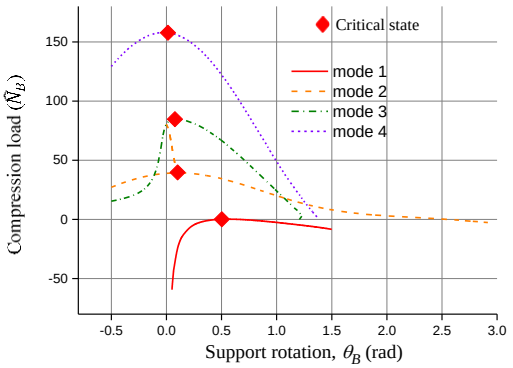
รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด $(\widehat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\widehat{w} = 2$



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด $(\widehat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\widehat{w} = 4$



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด $(\widehat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\widehat{w} = 6$

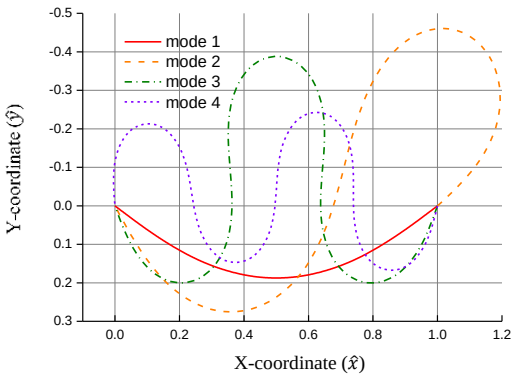


รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัด $(\widehat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) กรณีที่ $\widehat{w} = 8$

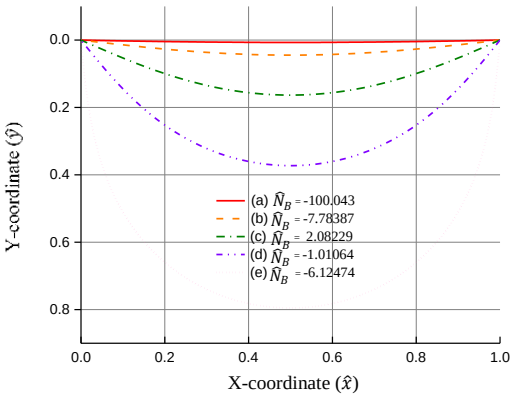
ตารางที่ 4 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่สภาวะวิกฤติของโครงสร้างคาน-เสา

$\widehat{w}$	Mode	$\widehat{S}_t$	θ_A	θ_B	$\widehat{y}_{max}$	$\widehat{V}_{max}$	$\widehat{M}_{max}$	$\widehat{N}_{Bcr}$	% Buckling load*
2	1	1.03280	-0.35887	0.35887	0.11589	-3.47572	1.08259	6.32515	100
	2	1.00019	0.02282	-0.02786	-0.00891	0.33345	-0.10376	39.47308	624
	3	1.00180	-0.07405	0.07403	-0.01226	-7.47217	-0.82261	87.18394	1378
	4	1.00007	-0.00943	-0.02210	-0.00277	-2.48926	-0.20502	157.84769	2496
4	1	1.05200	-0.44940	0.44940	0.14637	-4.30091	1.32546	4.07407	100
	2	1.00075	0.05040	-0.05067	-0.01777	0.63538	-0.20219	39.58166	972
	3	1.00290	-0.08498	0.08495	-0.01793	-9.85830	-1.05336	86.22372	2116
	4	1.00004	0.01594	-0.00580	-0.00367	1.08544	-0.115329	157.87403	3875
6	1	1.06770	-0.51049	0.51049	0.16742	-4.83850	1.47905	2.08456	100
	2	1.00019	0.01892	-0.01893	-0.01398	1.76356	-0.28411	74.00833	3550
	3	1.00380	-0.08775	0.08772	-0.02282	-10.53774	-1.20974	85.41382	4097
	4	1.00008	0.01887	-0.01910	-0.00475	0.45995	-0.07597	157.97282	7578
8	1	1.08120	-0.55694	0.55694	0.18375	-5.23687	1.58975	0.22827	100
	2	1.00309	0.11027	-0.09446	-0.03599	1.30688	-0.41245	39.35958	17243
	3	1.00490	-0.09103	0.09099	-0.02785	11.76699	-1.37248	84.68813	37100
	4	1.00014	0.03245	-0.01825	-0.006843	1.28075	-0.15119	157.86157	69156

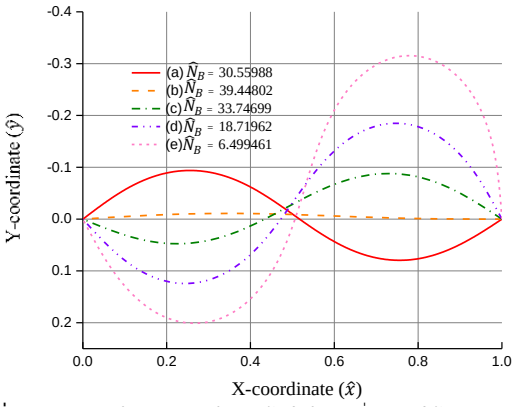
หมายเหตุ % Buckling load* คือร้อยละของค่าแรงอัดวิกฤติที่เทียบกับโหมดการโก่งเดาะที่ 1



รูปที่ 9 รูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างทั้ง 4 โหมดกรณีที่ $\widehat{w} = 6$ และ $\widehat{N}_B = 1$



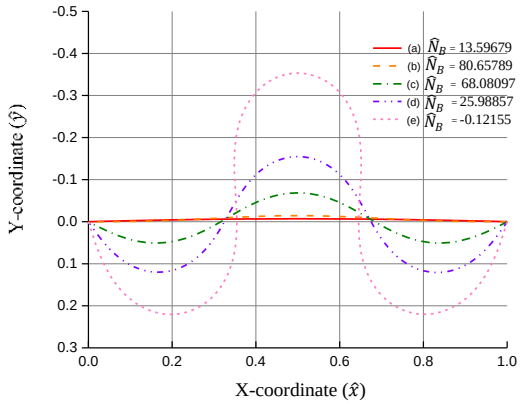
รูปที่ 10 รูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างในโหมดที่ 1 ภายใต้แรงอัดต่างๆ



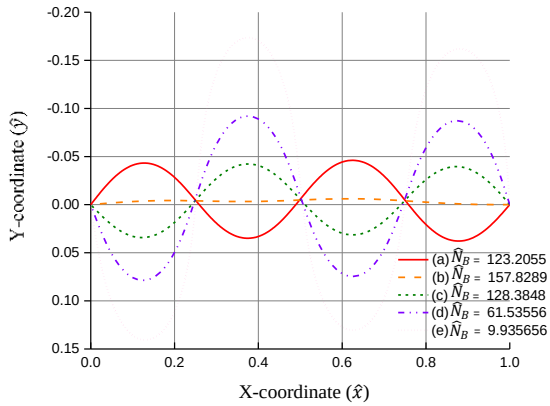
รูปที่ 11 รูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างในโหมดที่ 2 ภายใต้แรงอัดต่างๆ

ในที่นี้ จะอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างในกรณีที่ $\widehat{w} = 6$ ซึ่งรูปที่ 7 แสดงเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดที่ปลายโครงสร้าง $(\widehat{N}_B)$ และมุมที่จุดรองรับ B (θ_B) ของโหมดการเสียรูปทั้ง 4 แบบ สำหรับโหมดที่ 1 (เส้น 1a-1e) พบว่าจุดที่เกิดการโก่งเตาะคือจุด 1c (Critical Point) สำหรับช่วง 1a–1c โครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ (Stable Equilibrium) คือสภาวะที่ค่า θ_B เพิ่มขึ้นพร้อมกับค่า $\widehat{N}_B$ เพิ่มมากขึ้น ขณะที่ช่วง 1c–1e โครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ (Unstable Equilibrium) คือสภาวะที่ค่า θ_B เพิ่มขึ้นแต่ค่า $\widehat{N}_B$ ลดลง อย่างไรก็ดี สำหรับโหมดที่ 2 3 และ 4 จะไม่เกิดสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ จะพบเฉพาะสภาวะสมดุลวิกฤติและสภาวะสมแบบไร้เสถียรภาพ โดยมีสภาวะสมดุลวิกฤติอยู่ที่จุด 2b 3b และ 4b สำหรับโหมดการโก่งเตาะที่ 2 3 และ 4 ตามลำดับ นอกจากนั้นยังพบว่าโครงสร้างเปลี่ยนรูปแบบการโก่งเตาะจากโหมดที่ 2 ไปยังโหมดที่ 3 ตามเส้นโค้ง 2b-3b ดังแสดงในรูปที่ 7 ทั้งนี้ค่าแรงอัดวิกฤติของโครงสร้าง ($\widehat{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{Bcr}}$) สำหรับโหมดการโก่งเตาะที่ 1-4 ภายใต้น้ำหนัก $\widehat{w} = 2, 4, 6,$ และ 8 ได้แสดงไว้ในตารางที่ 4

รูปที่ 9 แสดงเปรียบเทียบรูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างทั้ง 4 รูปแบบในกรณีที่น้ำหนัก $(\widehat{w})$ เท่ากับ 6 และมีค่าแรงอัดไร้หน่วยที่ปลายที่ด้านขวาเท่ากัน $(\widehat{N}_B = 1)$ รูปที่ 10-13 แสดงรูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างตั้งแต่โหมดที่ 1-4 ตามลำดับ สำหรับกรณีที่ $\widehat{w}$ = 6 ซึ่งพิจารณาที่จุด a b c d และ e บนเส้นกราฟในรูปที่ 7



รูปที่ 12 รูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างในโหมดที่ 3 ภายใต้แรงอัดต่างๆ



รูปที่ 13 รูปร่างการโก่งเตาะของโครงสร้างในโหมดที่ 4 ภายใต้แรงอัดต่างๆ

4. สรุป

งานวิจัยนี้นำเสนอสมการครอบคลุมปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 แบบไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งเตาะของโครงสร้างคาน-เสาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยใช้วิธียิงเป้าในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งผลเฉลยที่ได้เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตที่วิเคราะห์ได้จากวิธีอีลิปติคอินทิกรัลพบว่าผลลัพธ์ทั้งสองมีความสอดคล้องกันโดยจะมีค่าต่างกันไม่เกิน 0.05% จากการวิเคราะห์

พฤติกรรมการโก่งเดาะของโครงสร้างภายใต้แรงอัดที่ปลายโดยคำนึงถึงผลกระทบจากแรงทางด้านข้าง พบว่าแรงทางด้านข้างทำให้แรงอัดวิกฤติและเสถียรภาพของโครงสร้างลดลง ซึ่งโครงสร้างสามารถเกิดการโก่งเดาะได้หลายรูปแบบ ได้แก่โหมดที่ 1 ซึ่งเป็นโหมดที่มีรูปร่างการโก่งเดาะที่ปราศจากจุดดัดกลับ สำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 2 3 และ 4 จะพบจำนวนจุดดัดกลับเท่ากับ 1 2 และ 3 ตามลำดับ สำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 1 จะมีสภาวะสมดุล 3 รูปแบบ ได้แก่สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ สภาวะสมดุลวิกฤติ และสภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ สำหรับโหมดการโก่งเดาะที่ 2 3 และ 4 จะมีสภาวะสมดุลเพียง 2 รูปแบบ คือสภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ และสภาวะสมดุลวิกฤติ นอกจากนั้นรูปแบบการโก่งเดาะในโหมดที่ 2 สามารถเปลี่ยนเป็นการโก่งเดาะในโหมดที่ 3 ได้

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความอนุเคราะห์สถานที่สำหรับการทำวิจัยและสนับสนุนทุนวิจัยครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

[1] สุนิสา รอดสังวาลย์. 2541. การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยวิธีไฟไนติเอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

[2] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์. 2538. การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

[3] ครัณย์ ชุ่มกลัด. 2560. ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลับเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี.

[4] Athisakul, C. Monprapussorn T., and Chucheepsakul, S. (2008). “Effect of Inclination on Bending of Variable-Arc-Length-Beams Subjected to Uniform Self-Weight,” Engineering Structure, 30, pp. 902-908.

[5] การันต์ คล้ายฉ่ำ. 2562. น้ำหนักวิกฤติของคานเอียงต่างระดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงดึงที่จุดรองรับ. วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ., 42(3), pp. 263-278.

[6] Chucheepsakul S., and Monprapussorn T. (2000). Divergence instability of variable-arc-length elastica pipes transporting fluid. Fluids and Structures, 14, pp.895-916.